**การซ่อมแซมภาพที่ใช้การแปรผันรวมสำหรับภาพสี**

**พชรพร ขวัญเมือง, มัญชุภา จินดาวงศ์**

**อาจารย์ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.นพดล ชุมชอบ**

**สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร**

**1.บทนำ**

ภาพถ่ายหรือภาพ มีความสำคัญในชีวิตประจำวันเป็นอย่างมากนอกจากภาพจะเป็นสื่อกลางการสื่อความหมายแล้ว ในบางครั้งเราใช้ภาพเพื่อแสดงถึงความรู้สึกและอารมณ์ของตนเอง นอกจากนี้ภาพยังมีความจำเป็นต่อการประยุกต์ในด้านต่างๆ เช่น การประยุกต์ในด้านการแพทย์ การประยุกต์ในด้านความมั่นคงและความปลอดภัย และการประยุกต์ในด้านอุตุนิยมวิทยา

การเกิดขึ้นของสัญญาณรบกวนในภาพถ่ายเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ เราจึงต้องการหาวิธีเพื่อแก้ปัญหาสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในภาพเหล่านี้ออกไป เพื่อให้ได้ภาพที่มีคุณภาพ และนำไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์ เราจะเริ่มจากการพิจารณาภาพ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่  *แทนพิกัดทางกายภาพ* (physical position) ของภาพ แทนระดับความเข้มของภาพ (image intensity) ที่ และ แทนโดเมนของภาพ ซึ่งในที่นี้เราสามารถสมมติได้โดยไม่เสียหลักการสำคัญว่า และ เมื่อ เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นโดย [1] (จะเรียกว่าตัวแบบ ROF) ซึ่งเป็นวิธีจำกัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพด้วยวิธีการแปรผันที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลายในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพที่มีโทนความเข้มสีเทา (grayscale image)

(1)

*โดยที่ และ*

*สำหรับภาพในระบบสี* RGB *เราพิจารณา*  แทนภาพในระบบสี RGB เมื่อ  โดยที่ แทนภาพโทนสีแดง สีเขียวและสีน้ำเงินของ  และให้ แทนภาพในระบบสี RGB ที่มีสัญญาณรบกวน เราสามารถปรับปรุงตัวแบบ ROF ได้เป็น  
 (2)

*เมื่อ และ*

เนื่องจากภาพทั่วไปเป็นภาพสี โครงงานวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายเพื่อพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพสีโดยใช้ตัวแบบ ROF ที่ถูกปรับปรุง (2)

**2.วิธีการเชิงตัวเลข**

2.1 สมการออยเลอร์-ลากรางจ์

โดยแคลคูลัสการแปรผัน สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมนัยกับตัวแบบ ROF (1) เขียนได้เป็น

(3)

*ภายใต้เงื่อนไขขอบ*  (4)

2.2 *การดิสครีตไทซ์เซชันแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์*

ในการแก้ปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) (3) โดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ เราจะเริ่มจากการดิสครีตไทซ์เซชันโดเมนภาพ แบบคงรูปด้วยระยะกริด (grid spacing) และจุดต่อไปนี้ *และ ซึ่งจะได้โดเมนภาพแบบดิสครีต* (discrete image domain)

*กำหนดให้*  *แทนฟังก์ชันกริด* (grid function) *ที่จุด*  *ประมาณค่าไฟไนต์ดิฟ-เฟอเรนซ์ของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งสามารถถูกกำหนดโดย*

*ในที่นี้เงื่อนไขค่าขอบใน* (4) *จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณฟังก์ชันกริด ณ บริเวณขอบของ ดังนี้*

2.3 *วิธีการเดินเวลา*

*เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงวิธีการเดินเวลา เราจะเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ใน* (3) *ใหม่เป็น*

*เมื่อ*  (5)

*และ*

วิธีการเดินเวลาหรือวิธีไทม์มาร์ชชิ่งเป็นวิธีการที่สะดวกและง่ายในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังสมการ (3) แนวคิดของวิธีการนี้ คือ การแนะนำตัวแปรเวลาสังเคราะห์ และ คำนวณหาคำตอบแบบสภาวะคงตัว (steady state solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่ขึ้นอยู่กับเวลา

(6)

*เพื่อแก้ไขความไม่เป็นเชิงเส้น เราสามารถใช้รูปแบบที่ชัดแจ้งของออยเลอร์* (Euler's explicit scheme) ดังนี้

โดยที่ แทนคำตอบเริ่มต้น โดยทั่วไปเรากำหนดให้

สำหรับการดิสครีตไทซ์โดเมนเวลา กำหนดให้ แทนขั้นเวลา (time step) ดังนั้นการปรับปรุง ณ รอบเวลาครั้งที่ สามารถถูกกำหนดได้เป็น

(7)

เพราะฉะนั้นเมื่อทำการประยุกต์การประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในหัวข้อ2.2 เราสามารถปรับปรุง ที่จุดกริด ได้เป็น (8)

เมื่อ (9)

(10)

(11)

2.4 *วิธีการสปริทเบรกแมนสำหรับตัวแบบ* ROF (1)

วิธีการสปริทเบรกแมนถูกคิดค้นโดย Goldstien และ Osher [2] เริ่มต้นจากการแนะนำตัวแปรเวกเตอร์เสริม พารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน (Bregman iterative parameter) และพารามิเตอร์ตัวโทษ (panalty parameter) เพื่อแปลงปัญหาเชิงการแปรผัน (1) เป็น

(12)

หลังจากใช้แคลคูลัสของการแปรผันกับ (12) จะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์เป็น

(13)

(14)

เมื่อ และ

*เพื่อความสะดวกในการแก้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ คณะผู้วิจัยใน* [2,3] *ได้ใช้เทคนิคการทำซ้ำแบบสลับ เริ่มจากการแก้ปัญหาย่อยใน* (13) *เพื่อกำหนดค่าของ จากนั้นนำ ที่ได้มาใช้ในการแก้ปัญหาย่อยใน* (14) *เพื่อกำหนดค่าของ โดยจะดำเนินการทำซ้ำแบบสลับจนกระทั่งลำดับของ สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด*

*เมื่อ และ แทนเวกเตอร์ของ ที่ได้จากการทำซ้ำรอบปัจจุบันและการทำซ้ำรอบก่อนหน้า แทนค่าความแม่นยำ*

*ในการแก้ปัญหาย่อยใน* (13) *เราจะเริ่มจากการประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์*

(15)

*เมื่อ*  (16)

*จากนั้นทำการสมมติว่า* (13) *มีเงื่อนไขขอบแบบเป็นคาบ* (periodic boundary condition) *ดังนั้น*

*หลังจากใช้การแปลงฟูเรียร์แบบดิสครีต* (discrete Fourier transform) *กับ* (15) *จะได้*

*หรือ*  (17)

เมื่อ แทนดัชนีในโดเมนเวลา และ เป็นดัชนีในโดเมนความถี่ เพราะฉะนั้น

(18)

*เมื่อ*

และ แทนการแปลงฟูเรียร์ผกผันแบบดิสครีต (discrete Fourier transform)

สำหรับ (14) มีผลเฉลยวิเคราะห์ที่ถูกกำหนดโดย [3]

(19)

2.5 วิธีการเชิงตัวเลขที่นำเสนอ

ในงานวิจัยนี้ เราจะนำวิธีการสปริทเบรกแมนมาประยุกต์กับปัญหาเชิงแปรผัน (2) โดยเราแนะนำ

เวกเตอร์เสริม พารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน และพารามิเตอร์ตัวโทษ

เพื่อแปลงปัญหาเชิงแปรผัน (2) เป็น

(20)

เมื่อใช้แคลคูลัสของการแปรผันกับ (20) จะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์เป็น

(21)

(22)

(23)

(24)

(25)

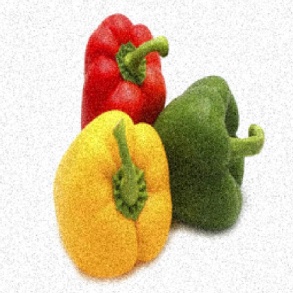
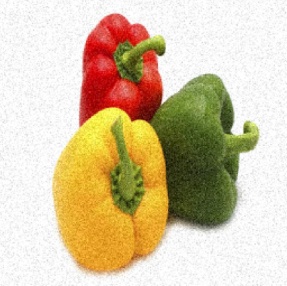
(26)

**3.ผลการทดลองเชิงตัวเลข**

ประสิทธิภาพของภาพที่ผ่านกำจัดสัญญาณรบกวน จะประเมินโดยใช้ค่า PSNR ระหว่างภาพต้นฉบับ และภาพผลลัพธ์ ซึ่งนิยามโดย

*โดยที่*

Original image Noise image Restored image (TM) Restored image (SB)



รูปภาพที่ 1 : ผลการกำจัดสัญญาณรนกวน ซึ่งมีขนาดความคมชัด พิกเซล เมื่อ

ตารางที่ 1 : ผลการคำนวณด้วยตัวแบบเชิงการแปรผันที่ได้นำเสนอ (1) สำหรับภาพสีด้วยวิธีการไทม์มาร์ชชิ่งและวิธีการสปริทเบรกแมน

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | PSNR | *เวลา (วินาที)* |
| *ภาพที่มีสัญญาณรบกวน*  *วิธีการไทม์มาร์ชชิ่ง*  *วิธีการสปริทเบรกแมน* | 26.2476  26.2742  32.8058 | 0.3215  37.1368  0.3215 |

จากผลการศึกษาเราพบว่าวิธีการสปริทเบรกแมนที่นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาเชิงการแปรผัน (2)

สามารถกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพสีในระบบ RGB ได้และจากรูปภาพที่ 1 จะเห็นได้ว่าภาพผลลัพธ์จากวิธีการสปริทเบรกแมนให้ความคมชัดของภาพได้ดีกว่าวิธีการไทม์มาร์ชชิ่งและจากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่าภาพผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการสปริทเบรกแมนมีประสิทธิภาพสูงกว่าและใช้เวลาในการประมวลผลเร็วกว่าภาพผลลัพธ์จากวิธีการไทม์มาร์ชชิ่ง

**4.บทสรุป**

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอตัวแบบเชิงการแปรผันสำหรับภาพสีและขั้นตอนวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ผลการทดลองเชิงตัวเลขพบว่าขั้นตอนวิธีการเชิงตัวเลขที่ผู้วิจัยได้นำเสนอสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนดังกล่าวได้อย่างแม่นยำและรวดเร็วกว่าวิธีการไทม์มาร์ชชิ่งซึ่งเป็นวิธีพื้นฐาน

**เอกสารอ้างอิง**

[1] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Physica D Vol. 60 (1992), pp. 259-268.

[2] T. Goldstein and S. Osher. The split bregman method for l1-regularized problems. SIAM Journal on Sciences 2009, 2(2), pp. 323-343.

[3] W. Lu, J. Duan, Z. Qiu, Z. Pan, R. W. Lim and L. Bai. Implementation of high-order variational models made easy for image processing. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 39 (2016), pp. 4208-4233.