8 ก.พ. 60

511101 Calculus I

อ.ดร.เฉลิมพงศ์ วรวรรณทัย

www.math.sc.su.ac.th

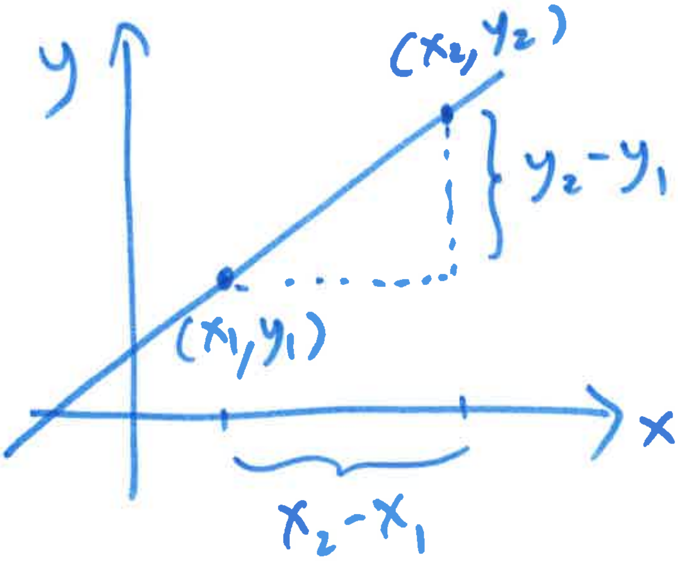
- lecture notes
- การบ้าน webwork

ข้อตกลง

บทที่ 2 อนุพันธ์

อนุพันธ์เป็นเรื่องของอัตราการเปลี่ยนแปลง

2.0 ทบทวนเส้นตรง

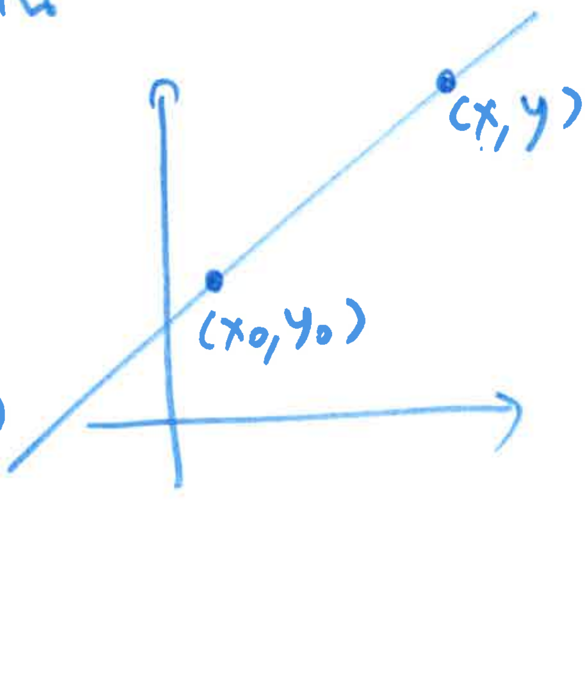


$$\text{ความชัน} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ถ้าอยากรู้สมการของเส้นตรง ต้องรู้ข้อมูลอะไรบ้าง?

1) ความชัน กับจุด 1 จุดที่เส้นตรงผ่าน
2) จุด 2 จุดที่เส้นตรงผ่าน

สมการเส้นตรง



$$\text{ความชัน} \quad m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ex จงหาสมการของเส้นตรงต่อไปนี้

1. เส้นตรงที่มีความชัน 2 และผ่านจุด $(2,8)$

Sol จากโจทย์จะได้ $m = 2$ และ $(x_0, y_0) = (2,8)$

$\therefore$ สมการเส้นตรง คือ

$$y - 8 = 2(x-2)$$
$$y - 8 = 2x - 4$$
$$y = 2x + 4$$

2. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,5)$ และ $(-3,-8)$

Sol ความชัน $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8-5}{-3-(-2)} = \frac{-13}{-1} = 13$

เลือก $(x_0, y_0) = (-2,5)$

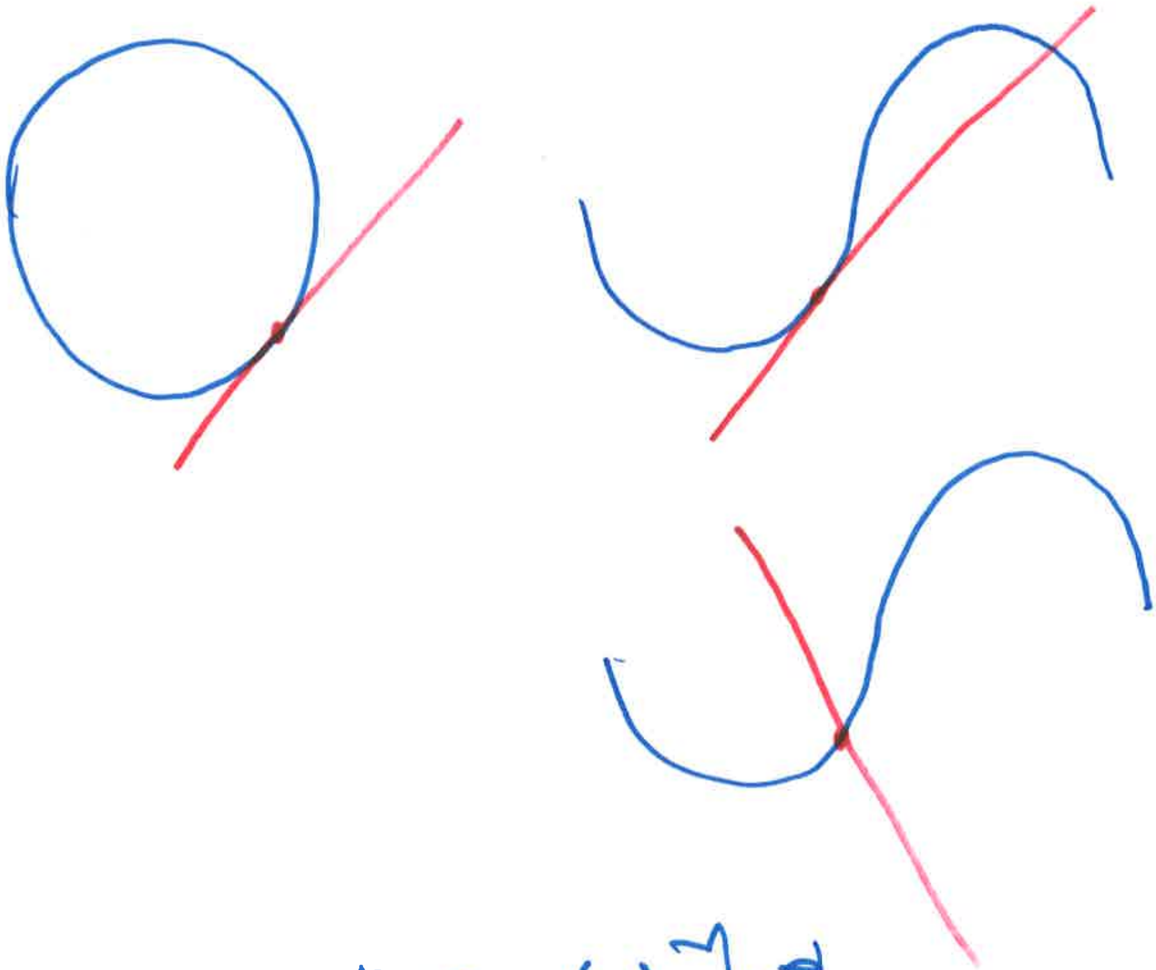
$\therefore$ สมการเส้นตรง คือ

$$y - 5 = 13(x+2)$$
$$y - 5 = 13x + 26$$
$$y = 13x + 31$$

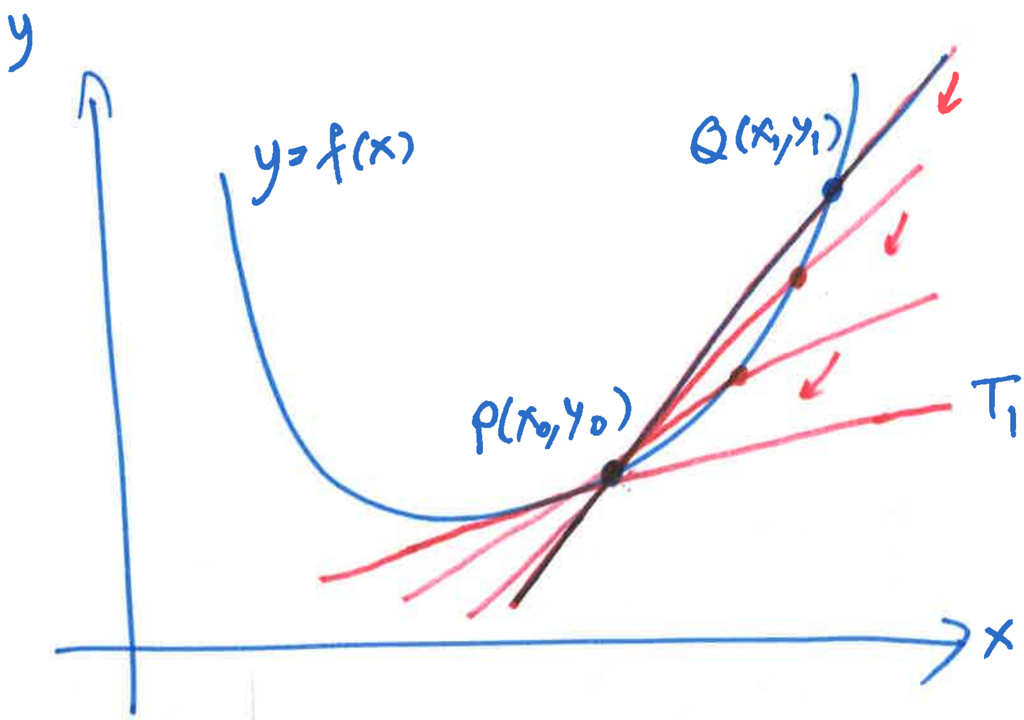
2.1 ปัญหาทางเรขาคณิต

ปัญหา: เราจะให้นิยามของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง
ที่จุดใดจุดหนึ่งของเส้นโค้งอย่างไร?

นิยามที่เคยได้ยิน: เส้นสัมผัสวงกลมคือเส้นตรง
ที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียว แต่นิยามนี้
ใช้กับเส้นโค้งอื่นไม่ได้



แล้วจะนิยามเส้นสัมผัสอย่างไรดี



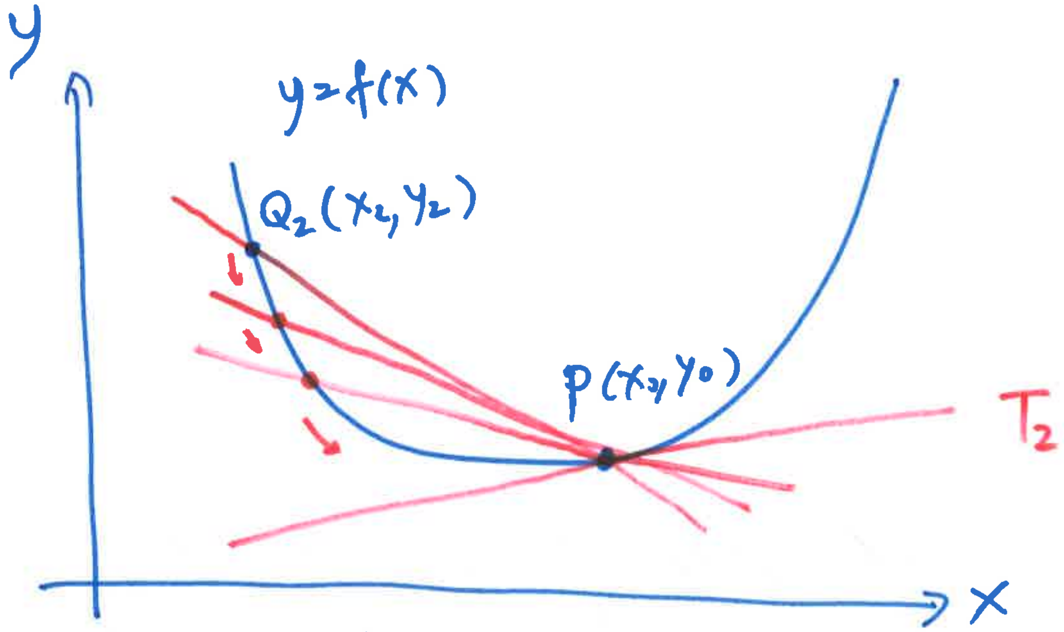
ความชันของเส้นตรง PQ $= \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$$= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

เลื่อนจุด Q เข้าหาจุด P จะได้ว่าเส้นตรง PQ
เลื่อนเข้าหาเส้นตรง T_1

ความชันของ $T_1 = \lim\limits_{x_1 \to x_0^+} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ ให้ $h = x_1 - x_0$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



ความชันของเส้นตรง $PQ_2 = \dfrac{y_2-y_0}{x_2-x_0}$

$$= \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

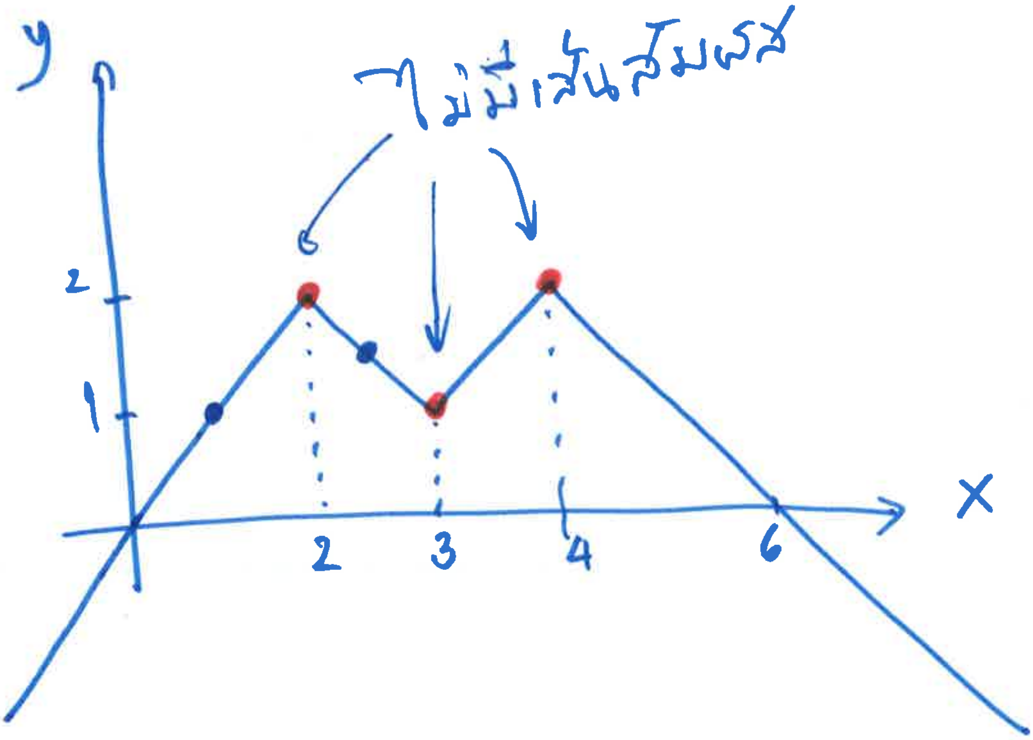
เลื่อนจุด Q_2 เข้าหาจุด P จะได้ว่าเส้นตรง PQ_2 เลื่อนเข้าหาเส้นตรง T_2

ความชันของ $T_2 = \lim_{x_2 \to x_0^-} \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ ให้ $h = x_2 - x_0$

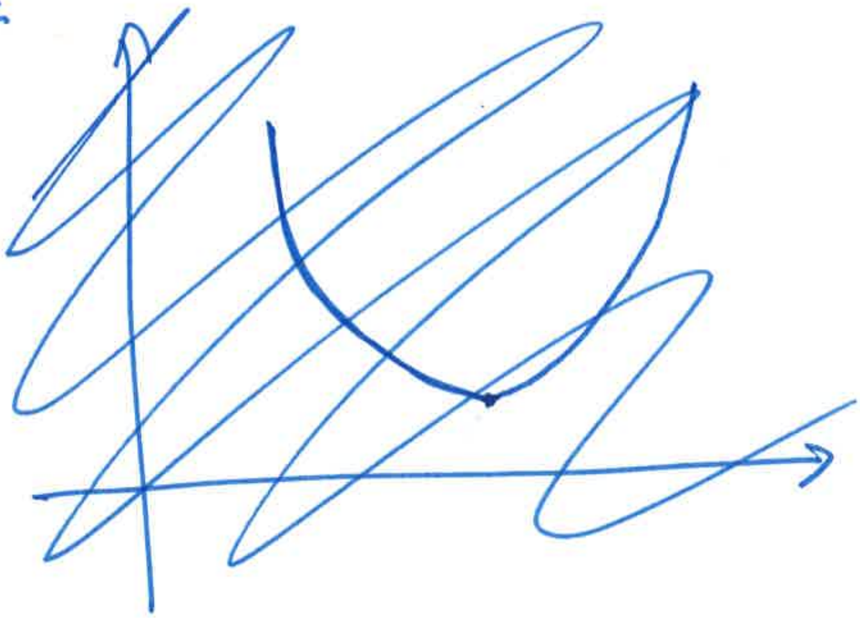
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ถ้าเส้นตรง T_1 และ T_2 เป็นเส้นเดียวกัน จะเรียกเส้นตรงนี้ว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด P ซึ่งมีความชัน $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

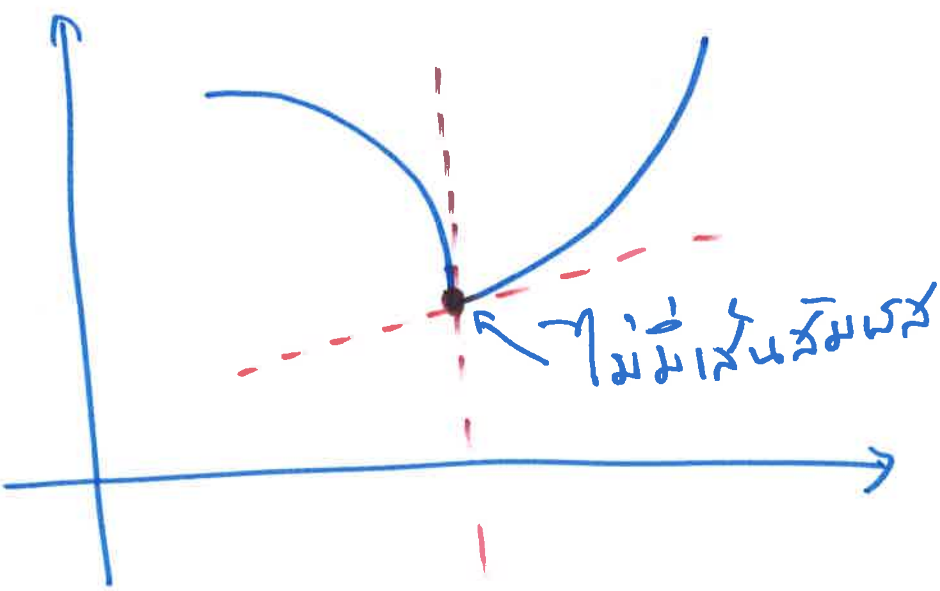
Ex



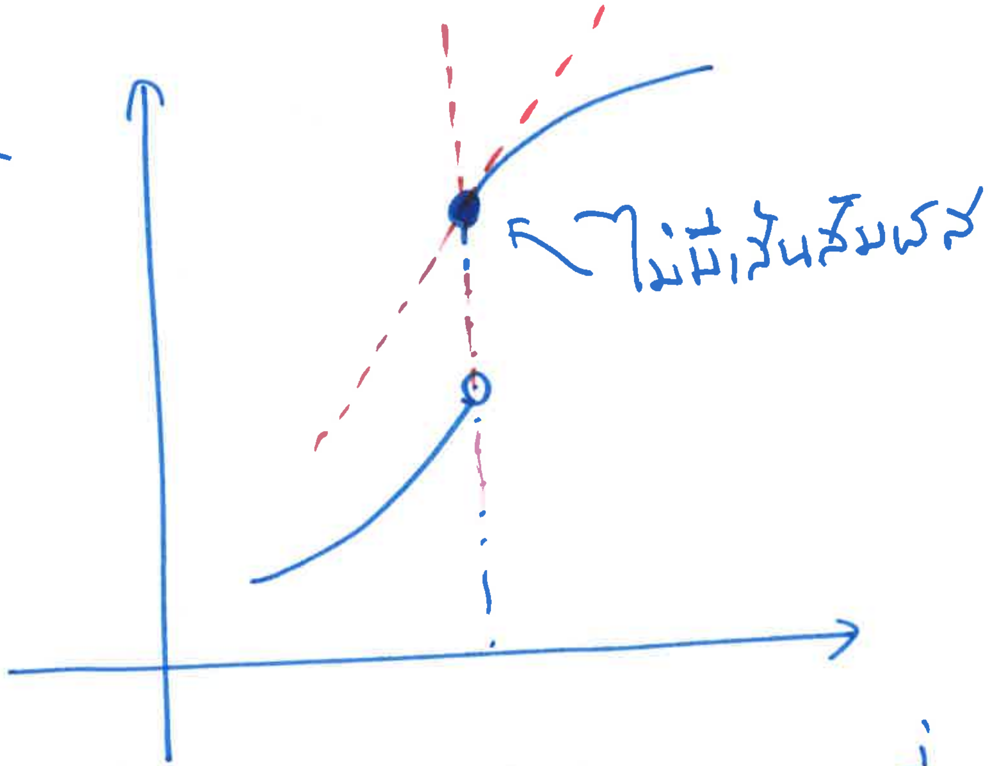
Ex



Ex



Ex



Ex จงหาเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่จุด $(-1, 1)$

Sol ให้ $f(x) = y = x^2$

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(-1, 1)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-1 + h)^2 - (-1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} - 2h + h^2 \cancel{- 1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(-2 + h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} -2 + h = -2$$

$\therefore$ สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่ $(-1, 1)$ คือ

$$y - 1 = -2(x + 1)$$

$$y = -2x - 1$$

2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

<u>บทนิยาม</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดรอบ a

ถ้า $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ หาค่าได้

จะเรียกลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์ของ f ที่ a

(derivative of f at a) และกล่าวว่า

f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

และเขียนแทนอนุพันธ์ของ f ที่ a ด้วย

$f'(a)$ หรือ $\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=a}$

ค่าลิมิตข้างบนก่อให้เกิด f' ที่นิยามโดย

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

สำหรับทุก ๆ $x\in D_f$ ที่ลิมิตหาค่าได้

และเรียกฟังก์ชัน f' ว่า <u>อนุพันธ์</u>ของ f

และถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุกสมาชิกในเซต $A\subseteq D_f$

จะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้บน A

ข้อสังเกต $f'(a)$ คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

$y=f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$

Ex ให้ $f(x) = 2x^2+2x+3$

1. จงหา $f'(-2)$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(-2+h)^2+2(-2+h)+3]-[2(-2)^2+2(-2)+3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(4-4h+h^2)-4+2h+3]-[8-4+3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[8-8h+2h^2-1+2h]-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2-6h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2h-6)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2h-6 = -6$$

2. จงหา $f'(0)$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2h^2+2h+\cancel{3})-(0+0+\cancel{3})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h}(h+1)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2(h+1) = 2(0+1) = 2$$

3. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $(0,3)$

ความชัน $= f'(0) = 2$

$\therefore$ สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $(0,3)$ คือ

$$y - 3 = 2(x-0)$$

$$y = 2x+3$$