9 ก.พ. 60

Ex จงหาความชันที่จุดใดๆ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ พร้อมทั้งสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2,3)$

Sol ให้ $f(x) = y = x^2 - 1$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ ที่ (x,y)

$$= f'(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 - 1] - [x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{-1}] \cancel{-x^2} \cancel{+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h^2)}{\cancel{h}}$$

$$= 2x + 0 = 2x$$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ ที่ $(2,3)$

$$= f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$\therefore$ สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ ที่ $(2,3)$ คือ

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8 + 3$$

$$y = 4x - 5$$

หมายเหตุ ถ้า $y=f(x)$ เราสามารถเขียน $f'(x)$ ได้หลายแบบดังนี้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

และเราสามารถเขียน $f'(a)$ ได้หลายแบบดังนี้

$$f'(a) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=a} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=a}$$

Ex ให้ $f(x)=|x-1|$

(1) จงหา $f'(0)$

(2) จงหา $f'(1)$

Sol

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{ถ้า } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{ถ้า } x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{ถ้า } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{ถ้า } x<1 \end{cases}$$

(1) $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(-h+\cancel{1})-(0+\cancel{1})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

(2) $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{? \quad -(1-1)}{h}$

0

ดูลิมิตซ้ายและขวา

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(\cancel{1}+h-\cancel{1})-(\cancel{1}-\cancel{1})}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[-(1+h)+1]-(\cancel{1}-\cancel{1})}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{-1}-h\cancel{+1}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1$

ลิมิตขวา $\neq$ ลิมิตซ้าย

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ $f'(1)$ หาค่าไม่ได้

Ex ให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x < 2 \\ 4x-4 & \text{ถ้า } x \geq 2 \end{cases}$

(1) จงหา $f'(3)$

(2) จงหา $f'(2)$

Sol

(1) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[4(3+h)-4]-[4(3)-4]}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[\cancel{12}+4h\cancel{-4}]-[\cancel{12}\cancel{-4}]}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 4 = 4$

(2) สังเกตว่า 2 อยู่บนรอยต่อ

$\therefore$ ต้องพิจารณาลิมิตขวาและซ้าย

$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{[4(2+h)-4]-[4(2)-4]}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{[\cancel{8}+4h\cancel{-4}]-[\cancel{8}\cancel{-4}]}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{4h}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} 4 = 4$

$\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(2+h)^2-[4(2)-4]}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\cancel{4}+4h+h^2\cancel{-4}}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0^-} 4+h = 4$

จะเห็นว่า ลิมิตขวา = ลิมิตซ้าย = 4

$\therefore f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$

Ex ให้ $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{ถ้า } x < 2 \\ 5x-5 & \text{ถ้า } x \geq 2 \end{cases}$

(1) จงหา $f'(x)$

(2) จงหา $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(4)$, $f'(2)$

Sol $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(1) แบ่งเป็น 3 กรณี คือ $x < 2$, $x > 2$ และ $x = 2$

กรณี $x < 2$

จะได้ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 \cancel{+1}] - [x^2 \cancel{+1}]}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 2x+h = 2x$

กรณี $x > 2$

จะได้ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[5(x+h) \cancel{-5}] - [5x \cancel{-5}]}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{5x} + 5h - \cancel{5x}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h \to 0} 5 = 5$

กรณี $x = 2$ ~~มัน~~ มันเป็นรอยต่อ ∴ ต้องพิจารณาลิมิตขวาและซ้าย

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[5(2+h)\cancel{-5}]-[5(2)\cancel{-5}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{10}+5h\cancel{-10}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{5h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 5 = 5$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{[(2+h)^2+1]-[5(2)-5]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{[\cancel{4}+4h+h^2+\cancel{1}]-[\cancel{5}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} 4+h = 4$$

∴ ลิมิตขวา ≠ ลิมิตซ้าย ⇒ ลิมิต $h\to 0$ ไม่มี

∴ $f'(2)$ หาค่าไม่ได้

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{ถ้า } x < 2 \\ 5 & \text{ถ้า } x > 2 \end{cases}$$

(2) $f'(0) = 2\cdot 0 = 0$

$f'(1) = 2\cdot 1 = 2$

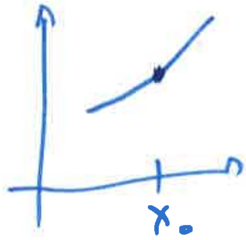
$f'(3) = 5$

$f'(4) = 5$

$f'(2)$ หาค่าไม่ได้

ทบ.

Thm ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x_0 แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0



Pf: จะต้องแสดงว่า $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

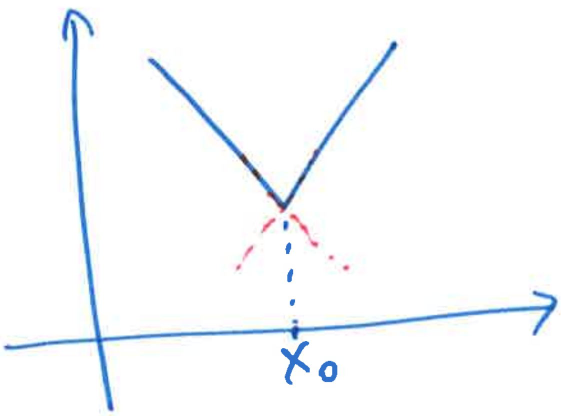
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) + f(x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] + \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$= 0 + f(x_0)$$

$$= f(x_0)$$

หมายเหตุ บทกลับอาจไม่เป็นจริง นั่นคือ ต่อเนื่อง ไม่ได้แปลว่า หาอนุพันธ์ได้



ทำแบบฝึกหัด 2.2

1.คี่ , 2.คี่ , 3, 4, 6

2.3 สมบัติของอนุพันธ์

Thm

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

2. (power rule) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ที่ไม่ใช่ศูนย์

3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

3.1 $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$ คูณด้วยค่าคงที่

3.2 $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$ บวก/ลบ

3.3 $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$ คูณ

หน้าดิฟหลัง + หลังดิฟหน้า

3.4 $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$ หาร

เมื่อ $g(x) \neq 0$

$\frac{\text{ล่างดิฟบน} - \text{บนดิฟล่าง}}{\text{ล่าง}^2}$

Pf:

1. ให้ $f(x) = c$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

ให้ $f(x) = x^n$

2. กรณี n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - \cancel{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

$$= \binom{n}{1}x^{n-1} + 0$$

$$= nx^{n-1}$$

3.3

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

Ex 1ü $y = 3x^4 - 6x + \frac{7}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^4 - 6x + 7x^{-2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(6x) + \frac{d}{dx}(7x^{-2})$$

$$= 3\frac{d}{dx}x^4 - 6\frac{d}{dx}x + 7\frac{d}{dx}x^{-2}$$

$$= 3\cdot 4x^3 - 6\cdot 1 + 7(-2)x^{-3}$$

$$= 12x^3 - 6 - 14x^{-3}$$

Ex $\frac{d}{dx}\left((x^2-1)(5x+6)\right) = (x^2-1)\frac{d}{dx}(5x+6) + (5x+6)\frac{d}{dx}(x^2-1)$

$$= (x^2-1)\cdot 5 + (5x+6)(2x)$$

$$= 5x^2 - 5 + 10x^2 + 12x$$

$$= 15x^2 + 12x - 5$$

Ex $\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{3x+1}\right) = \frac{(3x+1)\frac{d}{dx}\pi - \pi\frac{d}{dx}(3x+1)}{(3x+1)^2}$

$$= \frac{0 - \pi\cdot 3}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{-3\pi}{(3x+1)^2}$$

Ex $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-5x+1}{2x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2x^2} - \frac{5x}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}x^{-1} + \frac{x^{-2}}{2}\right)$

$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

$= -\frac{5}{2}(-1)x^{-2} + \frac{(-2)x^{-3}}{2}$

$= \frac{5}{2}x^{-2} - x^{-3}$