หน้า หลัง 15 ก.พ. 60

**Ex** จงหา $\frac{d}{dx}\Big((x+1)(x^2+2x)(x^3+5)\Big)$

$$= \cancel{\frac{d}{dx}}(x+1)\frac{d}{dx}\Big((x^2+2x)(x^3+5)\Big)$$

$$+ (x^2+2x)(x^3+5)\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)\Big[(x^2+2x)\frac{d}{dx}(x^3+5) + (x^3+5)\frac{d}{dx}(x^2+2x)\Big]$$

$$+ (x^2+2x)(x^3+5)\cdot 1$$

$$= (x+1)\Big[(x^2+2x)(3x^2)+(x^3+5)(2x+2)\Big]$$

$$+ (x^2+2x)(x^3+5)$$

บน

**Ex** จงหา $\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+1)(x^2+2x)}{x^3+5}\right)$

ล่าง

$$= \frac{(x^3+5)\frac{d}{dx}\Big[(x+1)(x^2+2x)\Big] - (x+1)(x^2+2x)\frac{d}{dx}(x^3+5)}{(x^3+5)^2}$$

$$= \frac{(x^3+5)\Big[(x+1)(2x+2)+(x^2+2x)\Big] - (x+1)(x^2+2x)(3x^2)}{(x^3+5)^2}$$

$$f \xrightarrow{\text{ดิฟ}} f' \xrightarrow{\text{ดิฟ}} (f')' \xrightarrow{\text{ดิฟ}} (f'')'$$

$$(f')' =: f'' \qquad (f'')' =: f'''$$

$$f^{(n)} := \overbrace{(((f')')' \cdots )'}^{\text{ดิฟ } n \text{ ครั้ง}}$$

เรียกว่า อนุพันธ์อันดับ $n$ ของ $f$

ถ้า $y = f(x)$ อนุพันธ์อันดับ $n$ ของ $y$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

Ex ให้ $f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$
จงหา $f'(x)$, $f''(x)$, $f'(0)$, $f''(1)$

Sol
$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$
$$f''(x) = 6x + 8$$
$$f'(0) = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$$
$$f''(1) = 6 + 8 = 14$$

Ex ให้ $g(x) = (x^2+1)(3x^2+2x)$
จงหา $g''(-1)$

Sol
$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[(x^2+1)(3x^2+2x)\right]$$
$$= (x^2+1)(6x+2) + (3x^2+2x)(2x)$$
$$g''(x) = \left[(x^2+1)\cdot 6 + (6x+2)(2x)\right] + \left[(3x^2+2x)\cdot 2 + (2x)(6x+2)\right]$$
$$g''(-1) = \left[2 \cdot 6 + (-4)(-2)\right] + \left[1 \cdot 2 + (-2)(-4)\right]$$
$$= 12 + 8 + 2 + 8 = 30$$

**Ex** ให้ $y = 3x^3 - 4x + \frac{6}{x^3}$

จงหา $\frac{dy}{dx}$ , $\frac{d^2y}{dx^2}$ , $\frac{d^3y}{dx^3}$ , $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$ , $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1}$

**Sol** $\cancel{\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4}$

$$y = 3x^3 - 4x + 6x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4 - 18x^{-4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x + 72x^{-5}$$

$$\frac{d^3y}{dx^2} = 18 - 360x^{-6}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} = 18 + 72 = 90$$

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1} = 18 - 360 = -342$$

<u>แบบฝึกหัด 2.3</u>

1. คี่, 2. คี่, 3, 4

## 2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

Ex ให้ $f(x) = x^{10}$, $g(x) = x^2+2x+5$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2+2x+5)^{10} =: h(x)$$

Thm (กฎลูกโซ่ : chain rule)

ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $g$ มีอนุพันธ์ที่ $x$ และ $f$ มีอนุพันธ์ที่ $g(x)$ แล้วฟังก์ชันผลประกอบ $f\circ g$ มีอนุพันธ์ที่ $x$ และ

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Thm ให้ $g$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ $x$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $\neq 0$ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left((g(x))^n\right) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$$

Pf: ให้ $f(x) = x^n$

$\therefore$ $f'(x) = nx^{n-1}$

$$(g(x))^n = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((g(x))^n) &= \frac{d}{dx}(f\circ g)(x)\\ &= f'(g(x))\cdot g'(x)\\ &= n(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)\end{aligned}$$

$\square$

ข้อสังเกต ถ้าให้ $y = f(u)$ และ $u = g(x)$

กฎลูกโซ่สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= f(u) \\ &= f(g(x)) \\ &= (f \circ g)(x) \\ \frac{du}{dx} &= g'(x) \\ \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} f(u) \\ &= f'(u) \end{aligned}}$$

**Ex** ให้ $y = (2x^3 + 3x + 5)^{2017}$

จงหา $\frac{dy}{dx}$

**Sol** $\frac{dy}{dx} = 2017(2x^3 + 3x + 5)^{2016} \cdot (6x^2 + 3)$

**Ex** ให้ $y = \left(\frac{5x+1}{2x+3}\right)^{20}$

จงหา $\frac{dy}{dx}$

**Sol** $\cancel{\frac{dy}{dx} = 20\left(\frac{5x+1}{2x+3}\right)^{19}}$

ให้ $u = \frac{5x+1}{2x+3}$

$y = u^{20}$

$\frac{dy}{du} = 20u^{19}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5x+1}{2x+3}\right) = \frac{(2x+3)(5)-(5x+1)(2)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{10x+15-10x-2}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{13}{(2x+3)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 20\left(\frac{5x+1}{2x+3}\right)^{19}\cdot\frac{13}{(2x+3)^2}$$

<u>Ex</u> ให้ $y = (x^2-x)^3 + 2(x^2-x)^2 - 3(x^2-x) + 5$

จงหา $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

<u>Sol</u> ให้ $u = x^2 - x$

$$y = u^3 + 2u^2 - 3u + 5$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 + 4u - 3$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left[3(x^2-x)^2 + 4(x^2-x) - 3\right](2x-1)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = [0+0-3](-1) = 3$$

Ex ให้ $y = (x^2+3x+5)^{10} + x^2+5$

จงหา $\frac{dy}{dx}$

Sol ให้ $y_1 = (x^2+3x+5)^{10}$ และ $y_2 = x^2+5$

ให้ $u = x^2+3x+5$

$$y_1 = u^{10}$$

$$\frac{dy_1}{du} = 10u^9$$

$$\frac{du}{dx} = 2x+3$$

$$\therefore \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10(x^2+3x+5)^9(2x+3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

$$= 10(x^2+3x+5)^9(2x+3) + 2x$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. คี่ 2. คี่ 3. คี่ 4. 5.

## 2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ที่ผ่านมา เราจะนิยามฟังก์ชัน $y$ ในรูปของ $x$

เช่น $y = x^2+3x+5$

นั่นคือ $x$ เป็นตัวแปรอิสระ $y$ เป็นตัวแปรตาม

แต่จะมีสมการบางรูปแบบที่ไม่ได้กำหนดว่า ตัวแปรใดเป็นตัวแปรอิสระ ตัวแปรใดเป็นตัวแปรตาม

เช่น $x^2+xy+y^2 = 4$

เราเรียกสมการแบบนี้ว่า <u>ฟังก์ชันโดยปริยาย</u> (implicit function)

Goal: $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันโดยปริยายมาให้

<u>Ex</u> ให้ $x^2+xy+y^2=4$

จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>Sol</u>

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = x\frac{dy}{dx}+y$$

หา $\frac{d}{dx}$ ของแต่ละข้างของสมการในโจทย์

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy+y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}[x+2y] = -2x-y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y}$$

Ex ให้ $y^3-2y^2+5y+2x^2y^2 = x^2+5x$

จงหา $\frac{dy}{dx}$

Sol

$$\frac{dy^3}{dx} = \frac{dy^3}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(2x^2y^2) = 2x^2\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(2x^2)$$

$$= 2x^2\cdot 2y\frac{dy}{dx} + y^2\cdot 4x$$

$$= 4x^2y\frac{dy}{dx} + 4xy^2$$

หา $\frac{d}{dx}$ ของแต่ละข้างของสมการในโจทย์

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 4y\frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} + 4x^2y\frac{dy}{dx} + 4xy^2 = 2x+5$$

$$\frac{dy}{dx}\left[3y^2 - 4y + 5 + 4x^2y\right] = 2x+5-4xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+5-4xy^2}{3y^2-4y+5+4x^2y}$$

Ex ให้ $3x^2 - 2y^3 = 9y - 2x^2y$

จงหา $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}$

Sol หา $\frac{d}{dx}$ ของแต่ละข้างของสมการในโจทย์

$$6x - 6y^2\frac{dy}{dx} = 9\frac{dy}{dx} - \left[2x^2\frac{dy}{dx} + y\cdot 4x\right]$$

$$\frac{dy}{dx}\left[-6y^2 - 9 + 2x^2\right] = -4xy - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4xy-6x}{-6y^2-9+2x^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{-36-18}{-54-9+18}$$

$$= \frac{-54}{-45}$$

$$= \frac{6}{5}$$