16 ก.พ. 60

<u>Ex</u> ให้ $3xy-2y=4-2x^2$

จงหา $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}$

<u>Sol</u> หา $\frac{d}{dx}$ ของแต่ละข้างของสมการ

$$\left(3x\frac{dy}{dx}+y\frac{d}{dx}(3x)\right)-2\frac{dy}{dx} = 0-4x$$

$$3x\frac{dy}{dx}+3y-2\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\frac{dy}{dx}(3x-2) = -4x-3y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x-3y}{3x-2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \frac{-4-6}{3-2} = -10$$

<u>Thm</u> (Power rule)

ถ้า n เป็นจำนวนตรรกยะที่ $\neq 0$ แล้ว $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

<u>Pf:</u> ให้ n เป็นจำนวนตรรกยะที่ $\neq 0$

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม r และ s ที่ $s \neq 0$ และ $n = \frac{r}{s}$

ให้ $y = x^n = x^{\frac{r}{s}}$

จะได้ $y^s = x^r$

$$\frac{d}{dx}y^s = \frac{d}{dx}x^r$$

$$\frac{dy^s}{dy}\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$$

$$s y^{s-1} \frac{dy}{dx} = r x^{r-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r x^{r-1}}{s y^{s-1}} = \frac{r}{s} x^{r-1} y^{1-s} = \frac{r}{s} x^{r-1} \left(x^{\frac{r}{s}}\right)^{1-s}$$

$$= \frac{r}{s} x^{r-1} x^{\frac{r}{s}-r}$$

$$= \frac{r}{s} x^{\frac{r}{s}-1}$$

$$= n x^{n-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} x^n = \frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{du^n}{dx} &= \frac{du^n}{du} \frac{du}{dx} \\ &= n u^{n-1} \frac{du}{dx} \end{aligned}}$$

<u>Ex</u> $$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{4}{3}} \right) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) x^{-\frac{7}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{3} x^{-\frac{7}{3}}$$

<u>Ex</u> $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \sqrt{3x^2+5} \right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + (3x^2+5)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (3x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(3x^2+5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+5}}$$

Ex $\dfrac{d}{dx}\left((2x+1)^5 \sqrt{4x+5} \right)$

$$= (2x+1)^5 \frac{d}{dx} (4x+5)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{4x+5}\, \frac{d}{dx} (2x+1)^5$$

$$= (2x+5)^5 \frac{1}{2} (4x+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 + \sqrt{4x+5} \cdot 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot 2$$

$$= \frac{2(2x+5)^5}{\sqrt{4x+5}} + 10\sqrt{4x+5}\,(2x+1)^4$$

Ex ให้ $y^4 - 2\sqrt{y} + 7y = 5x^2 + 4x\sqrt{y} - 3$

จงหา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}$

Sol หา $\dfrac{d}{dx}$ ของทั้งสองข้างของสมการ

$$4y^3 \frac{dy}{dx} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 10x + 4x \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$$

$$+ \sqrt{y} \cdot 4 + 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left[4y^3 - y^{-\frac{1}{2}} + 7 - 2xy^{-\frac{1}{2}}\right] = 10x + 4\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x + 4\sqrt{y}}{4y^3 - y^{-\frac{1}{2}} + 7 - 2xy^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{10+4}{4-1+7-2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

Ex จงหาความชันของเส้นโค้ง $y^2+xy-x^2=5$ ที่จุด $(4,3)$

Sol ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x,y) คือ $\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ 〃————〃 $(4,3)$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,3)}$

หา $\frac{d}{dx}$ ของทั้งสองข้างของสมการ

$$2y\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}+y-2x=0$$

$$\frac{dy}{dx}\left[2y+x\right]=2x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{2y+x}$$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(4,3)$ $=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,3)}=\frac{8-3}{6+4}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

ถามต่อ : หาเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $(4,3)$

$$m=\frac{1}{2}$$

$$(x_0,y_0)=(4,3)$$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-3=\frac{1}{2}(x-4)$$

$$y=\frac{x}{2}-2+3$$

$$y=\frac{x}{2}+1$$

เป็นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(4,3)$

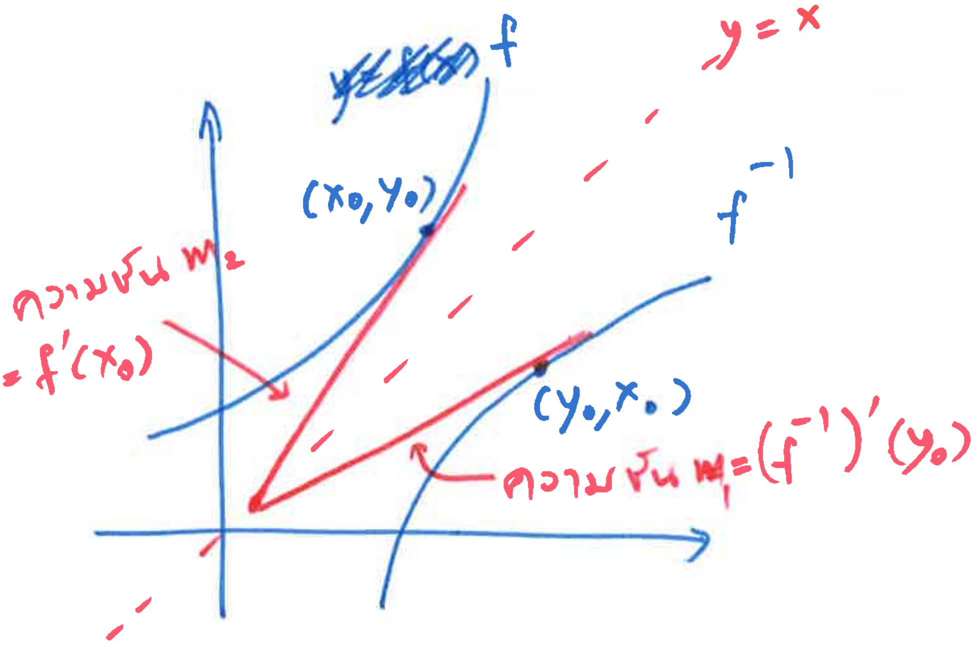
ทำแบบฝึกหัด 2.5

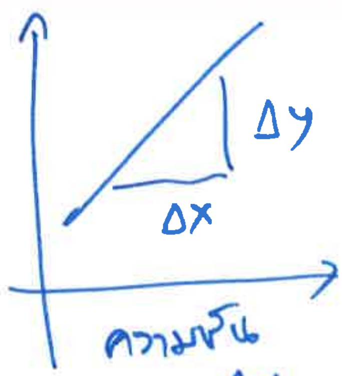
1. คี่ 2. คี่ 3. 4. 6. 8.

2.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จากเซต A ไปทั่วถึงเซต B แล้วฟังก์ชันผกผันของ f เขียนแทนด้วย f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก B ไปทั่วถึง A ที่นิยามโดย

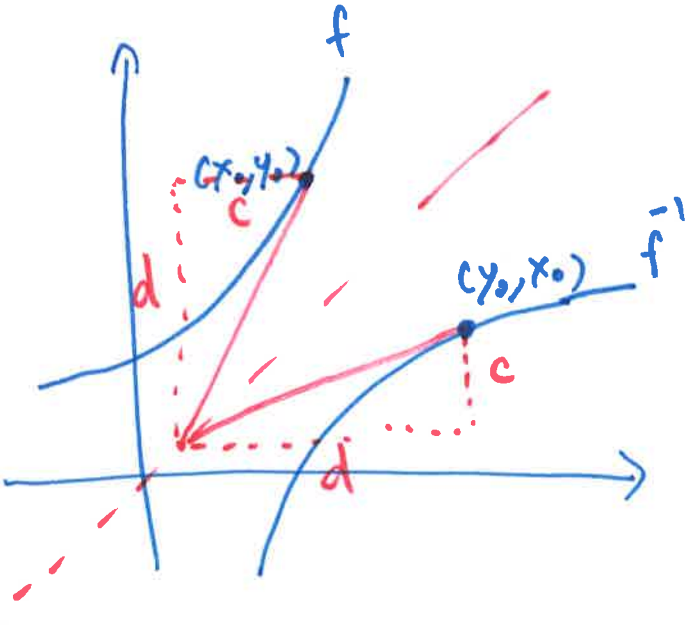
$f^{-1}(y) = x$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$ สำหรับทุกๆ $x \in A$ และ $y \in B$





ความชัน

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



$m_1 = \dfrac{c}{d}$, $m_2 = \dfrac{d}{c}$

$m_1 = \dfrac{1}{m_2}$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

แต่ว่า $f(x_0) = y_0$

$\therefore x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$\therefore \ (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Thm ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผัน คือ $x=f^{-1}(y)$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด I ถ้า $a=f^{-1}(b) \in I$ ซึ่ง $f'(a) \neq 0$ แล้ว f^{-1} มีอนุพันธ์ที่ b

และ
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Ex จงหา $(f^{-1})'(2)$ เมื่อ $f(x) = 8x^3+1$

Sol ให้ $f^{-1}(2) = a$

$$2 = f(a) = 8a^3+1$$
$$1 = 8a^3$$
$$a^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\therefore \ f^{-1}(2) = a = \frac{1}{2}$

จาก $f(x) = 8x^3+1$ จะได้ $f'(x) = 24x^2$

$$\therefore (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{24\cdot(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{6}$$

Ex จงหา $(f^{-1})'(1)$ เมื่อ $f(x) = x^5+7x^3+4x+1$

Sol $$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

ให้ $f^{-1}(1) = a$

$$\therefore \; 1 = f(a) = a^5+7a^3+4a+1$$

$$a^5+7a^3+4a = 0$$

$$a(\underbrace{a^4+7a^2+4}_{\geq 4}) = 0$$

$$\therefore \; f^{-1}(1)=a = 0$$

$$f'(x) = 5x^4+21x^2+4$$

$$\therefore \; (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Ex ให้ $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$ จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f^{-1}(x)$ ที่จุด $(-1, 1)$

Sol ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f^{-1}(x)$ ที่จุด $(-1, 1)$ คือ $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))}$

~~ให้~~ $\cancel{f^{-1}(-1) = a}$

$$\cancel{-1 = f(a) = a^3 - \frac{2}{a}}$$

$$\cancel{-a = a^4 - 2}$$

$$\cancel{0 = a^4 + a - 2}$$

เนื่องจากเส้นโค้ง $y = f^{-1}(x)$ ผ่านจุด $(-1, 1)$

จะได้ $f^{-1}(-1) = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{2}{x} &= -2x^{-1} \\ \frac{d}{dx}(-2x^{-1}) &= 2x^{-2} \end{aligned}}$$

ต่อมา $f'(x) = 3x^2 + 2x^{-2}$

$$= 3x^2 + \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))}$$

$$= \frac{1}{f'(1)}$$

$$= \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$$ = ความชัน

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x+1)$$

$$y = \frac{x}{5} + \frac{1}{5} + 1$$

$$y = \frac{x}{5} + \frac{6}{5}$$

เป็นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f^{-1}(x)$ ที่จุด $(-1, 1)$

ทำแบบฝึกหัด 2.6

1. คี่, 2, 3

2.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln a^b = b \ln a$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

เริ่มจาก $y = \ln x$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

แทน $t = \frac{h}{x}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{xt}\ln(1+t)$$

$$= \frac{1}{x}\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}_{=1}$$

(ค้นออนไลน์ดู)

$$= \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x$$

$$= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

สรุป

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

ให้ $u = g(x)$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Pf: $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d\ln u}{du}\,\frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{u}\cdot\frac{dy}{dx}$

<u>Ex</u> $\frac{d}{dx}\ln(2x^3+1) = \frac{1}{2x^3+1}\cdot 6x = \frac{6x}{2x^3+1}$

<u>Ex</u> $\frac{d}{dx}\ln(3x^2+x)^3 = \frac{1}{(3x^2+x)^3}\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+x)^3$

$= \frac{1}{(3x^2+x)^3}\cdot 3(3x^2+x)^2(6x+1)$

<u>Ex</u> $\frac{d}{dx}(\ln(3x^2+x))^3 = 3(\ln(3x^2+x))^2\frac{d}{dx}\ln(3x^2+x)$

$= 3(\ln(3x^2+x))^2\cdot\frac{1}{(3x^2+x)}\cdot(6x+1)$

$\ln^3(3x^2+x)$