22 ก.พ. 60

$$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ex $\frac{d}{dx} \log_9 (3x^2+5) = \frac{1}{\ln 9} \cdot \frac{1}{3x^2+5} \cdot 6x$

Ex $\frac{d}{dx} \left[(x^2+1) \ln (3x^4+2x) \right]$

$$= (x^2+1) \frac{d}{dx} \ln (3x^4+2x) + \ln (3x^4+2x) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= (x^2+1) \cdot \frac{1}{3x^4+2x} \cdot (12x^3+2) + \ln (3x^4+2x) \cdot (2x)$$

$$= \frac{(x^2+1)(12x^3+2)}{3x^4+2x} + (2x) \ln (3x^4+2x)$$

Ex $\frac{d}{dx} \ln \left[(x^2+1)^5 (2x^2+3) \right]$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^5(2x^2+3)} \cdot \frac{d}{dx} \left[(x^2+1)^5 (2x^2+3) \right]$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^5(2x^2+3)} \left[(x^2+1)^5 \frac{d}{dx} (2x^2+3) + (2x^2+3) \frac{d}{dx} (x^2+1)^5 \right]$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^5(2x^2+3)} \left[(x^2+1)^5 (4x) + (2x^2+3) \cdot 5 (x^2+1)^4 \cdot 2x \right]$$

$$= \frac{(x^2+1)^5 (4x) + 10x (2x^2+3)(x^2+1)^4}{(x^2+1)^5 (2x^2+3)}$$

ข้อ 2

$$\frac{d}{dx} \ln \left[(x^2+1)^5 (2x^2+3) \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\ln (x^2+1)^5 + \ln (2x^2+3) \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[5 \ln (x^2+1) + \ln (2x^2+3) \right]$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x + \frac{1}{2x^2+3} \cdot 4x$$

$$= \frac{10x}{x^2+1} + \frac{4x}{2x^2+3}$$

$\underline{\text{Ex}}$ $$\frac{d}{dx} \ln \frac{(x+1)(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}\,(3-5x)^8}$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\ln\big((x+1)(x^2+2)\big) - \ln\left(\sqrt{x^2+1}\,(3-5x)^8\right) \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\ln (x+1) + \ln (x^2+2) - \ln \sqrt{x^2+1} - \ln (3-5x)^8 \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\ln (x+1) + \ln (x^2+2) - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) - 8 \ln (3-5x) \right]$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{2(x^2+1)} - \frac{8(-5)}{3-5x}$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลคูณ
หรือผลหารของหลาย ๆ พจน์ อาจทำให้ง่ายขึ้นได้
โดยใช้ ln และฟังก์ชันปริยาย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>Ex</u> ให้ $y = \dfrac{(x^2+3x)^5(2x+7)}{(7x+5)^{\frac{3}{2}}}$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>Sol</u> หา ln ของทั้ง 2 ข้าง

$$\ln y = \ln \frac{(x^2+3x)^5(2x+7)}{(7x+5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\ln y = \ln\left[(x^2+3x)^5(2x+7)\right] - \ln\left[(7x+5)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\ln y = \underbrace{\ln(x^2+3x)^5}_{5\ln(x^2+3x)} + \ln(2x+7) - \frac{3}{2}\ln(7x+5)$$

หา $\dfrac{d}{dx}$ ของทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{5}{x^2+3x}(2x+3) + \frac{2}{2x+7} - \frac{3}{2}\,\frac{7}{7x+5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{10x+15}{x^2+3x} + \frac{2}{2x+7} - \frac{21}{14x+10}\right)y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{10x+15}{x^2+3x} + \frac{2}{2x-7} - \frac{21}{14x+10}\right)\frac{(x^2+3x)^5(2x+7)}{(7x+5)^{\frac{3}{2}}}$$

Ex จงหา $\dfrac{d}{dx}\left[(2x^5+3)(7x-3)^7\sqrt{x^2+1}\,(2x+5)^{\frac{8}{3}}\right]$

Sol ให้ $y = (2x^5+3)(7x-3)^7\sqrt{x^2+1}\,(2x+5)^{\frac{8}{3}}$

หา ln ทั้ง 2 ข้าง

$$\ln y = \ln(2x^5+3) + \ln(7x-3)^7 + \ln\sqrt{x^2+1} + \ln(2x+5)^{\frac{8}{3}}$$

$$\ln y = \ln(2x^5+3) + 7\ln(7x-3) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{8}{3}\ln(2x+5)$$

หา $\dfrac{d}{dx}$ ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{10x^4}{2x^5+3} + \frac{7\cdot 7}{7x-3} + \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{8}{3}\,\frac{2}{2x+5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{10x^4}{2x^5+3} + \frac{49}{7x-3} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{16}{3(2x+5)}\right](2x^5+3)(7x-3)^7 \cdot \sqrt{x^2+1}\,(2x+5)^{\frac{8}{3}}$$

เลขชี้กำลังไม่ใช่ค่าคงที่

Ex จงหา $\frac{d}{dx}\left[(2x+1)^x\right]$

Sol ให้ $y = (2x+1)^x$

นำ ln ทั้ง 2 ข้าง

$$\ln y = \ln (2x+1)^x$$

$$\ln y = x \ln (2x+1)$$

นำ $\frac{d}{dx}$ ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x \ln(2x+1)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cancel{\frac{d}{dx}}\, x \frac{d}{dx} \ln(2x+1) + \ln(2x+1)\frac{d}{dx}x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{2}{2x+1} + \ln(2x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)\right](2x+1)^x$$

Ex $\frac{d}{dx}\ln\left(\ln 5(x^2+1)^3\right)$

$$= \frac{1}{\ln 5(x^2+1)^3} \cdot \frac{d}{dx} \ln 5(x^2+1)^3$$

$$= \frac{1}{\ln 5(x^2+1)^3} \cdot \frac{1}{\cancel{5}(x^2+1)^3} \cdot \cancel{5} \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

$$= \frac{6x}{(x^2+1)\ln 5(x^2+1)^3}$$

คิดอีกแบบ

$$\frac{d}{dx}\ln 5(x^2+1)^3 = \frac{d}{dx}\left(\ln 5 + \ln (x^2+1)^3\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\ln 5 + 3\ln(x^2+1)\right)$$

$$= 0 + 3\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$= \frac{6x}{x^2+1}$$

ทำแบบฝึกหัด 2.7

1. คี่ 2. คี่ 3. คู่

2.8 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

Ex ให้ $y = a^x$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ ที่ > 0

จงหา $\frac{dy}{dx}$

Sol $\ln y = \ln a^x = x\ln a$

หา $\frac{d}{dx}$ ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\ln a) = \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln a\cdot y = \ln a\cdot a^x$$

ให้ $u = g(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = \ln a\cdot a^x \qquad \frac{d}{dx}a^u = \ln a\cdot a^u\cdot\frac{du}{dx}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}}$$

Ex

$$\frac{d}{dx}\left(10^x + 2e^x + 7^x\right)$$

$$= \ln 10 \cdot 10^x + 2e^x + \ln 7 \cdot 7^x$$

Ex $$\frac{d}{dx}\left(e^{5x+1} + x^2 e^{2x}\right)$$

$$= 5e^{5x+1} + x^2 \frac{d}{dx} e^{2x} + e^{2x} \frac{d}{dx} x^2$$

$$= 5e^{5x+1} + 2x^2 e^{2x} + 2x e^{2x}$$

$$b^a \cdot c^a = (bc)^a$$

Ex $$\frac{d}{dx}\left(2^x \cdot 3^x\right)$$

$$= \frac{d}{dx} 6^x = \ln 6 \cdot 6^x$$

Ex $$\frac{d}{dx} 3^{\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \ln 3 \cdot 3^{\sqrt{x^2+5}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+5)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln 3 \cdot 3^{\sqrt{x^2+5}} \cdot \frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{\ln 3 \cdot 3^{\sqrt{x^2+5}} \cdot x}{\sqrt{x^2+5}}$$

Ex จงหา $\frac{d}{dx} x^x$

$\cancel{= (x-1)x^{x}}$

$\cancel{= x \cdot x^{x-1}}$

Sol ให้ $y = x^x$

$\ln y = \ln x^x = x \ln x$

หา $\frac{d}{dx}$ ทั้ง 2 ข้าง

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx}\ln x + \ln x \cdot 1$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$

$\frac{dy}{dx} = (1+\ln x)\, x^x$

Ex จงหา $\frac{d}{dx} x^{x^x}$

$2^{3^4} = 2^{81}$

Sol ให้ $y = x^{x^x} = x^{(x^x)}$

$\ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x$

หา $\frac{d}{dx}$ ทั้ง 2 ข้าง

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x \frac{d}{dx}\ln x + \ln x \frac{d}{dx} x^x$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (1+\ln x)\, x^x$

$\frac{dy}{dx} = \left[x^{x-1} + \ln x\,(1+\ln x)\, x^x\right] x^{x^x}$

Ex $\frac{d}{dx} 2^{\ln(x^2+5)\ln(x+3)}$

$$= \ln 2 \cdot 2^{\ln(x^2+5)\ln(x+3)} \frac{d}{dx}\left[\ln(x^2+5)\ln(x+3)\right]$$

$$= \ln 2 \cdot 2^{\ln(x^2+5)\ln(x+3)} \left[\frac{\ln(x^2+5)}{x+3} + \frac{\ln(x+3)}{x^2+5} \cdot 2x\right]$$

Ex จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = xe^x$ ที่ $(1,e)$

Sol ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1,e)$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{(1,e)}$$

$$= (xe^x + e^x)\Big|_{(1,e)}$$

$$= e + e$$

$$= 2e$$

$\therefore$ สมการของเส้นสัมผัสคือ

$$y - e = 2e(x-1)$$

$$y = 2ex - 2e + e$$

$$y = 2ex - e$$

ทำแบบฝึกหัด 2.8

1. คู่   3. คี่

$e^0 = 1$

$\ln e = 1$

$\ln 1 = 0$