บทที่ 4 กฎของโลปิตาล (L'Hôpital's Rule)

4.1 ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$

นิยาม เรากล่าวว่าฟังก์ชัน $\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ c

เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$

และกล่าวว่าฟังก์ชัน $\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c

เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$.

(ในที่นี้ $x\to c$ อาจแทนด้วย $x\to c^-, x\to c^+, x\to\infty, x\to-\infty$)

Thm กฎของโลปิตาล

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

ซึ่งเราอาจจะยกเว้นที่ $c \in (a,b)$.

ถ้า $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \neq c$

และถ้า $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c

แล้ว $$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

Sol เนื่องจาก $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

และ $\lim_{x\to 0} x = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\sin x}{\frac{d}{dx}x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$$

$$= \cos 0 = 1$$

Ex $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + 2x - 1}{3x}$

มีรูปแบบ $\frac{\cos 0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$

$\therefore$ โดยกฎของโลปิตาลจะได้

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) + 2x - 1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x) + 2}{3}$$

$$= \frac{-2\sin 0 + 2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

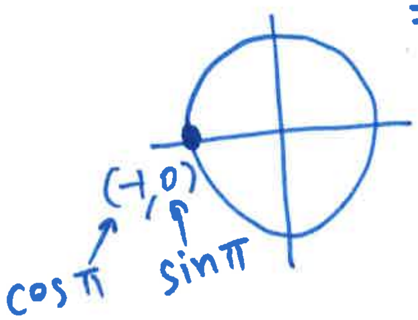
Ex $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}$ มีรูปแบบ $\frac{e^{0}+e^{0}-2}{1-\cos 0} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{+2\sin(2x)}$ มีรูปแบบ $\frac{e^{0}-e^{0}}{2\sin 0} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}}{4\cos(2x)} = \frac{e^{0}+e^{0}}{4\cos 0} = \frac{2}{4}$

Ex $\lim_{x\to \pi} \frac{\tan x}{(x-\pi)^3}$ มีรูปแบบ $\frac{\tan \pi}{(\pi-\pi)^3} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to \pi} \frac{\sec^2 x}{3(x-\pi)^2}$ $\qquad \frac{\sec^2 \pi}{3(\pi-\pi)^2} = \frac{(-1)^2}{0^+} = \frac{1}{0^+} = \infty$



$= \infty$

$\frac{1}{0.1} = 10$

$\frac{1}{0.01} = 100$

$\frac{1}{0.001} = 1000$

Ex $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{5x+2}$ มีรูปแบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

Ex $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{5x^2+2x+1}$ มีรูปแบบ $\dfrac{-\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{10x+2}$ $\qquad \dfrac{3}{-\infty}$

$= 0$

Ex $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{4x+1}}{x^2}$ มีรูปแบบ $\dfrac{e^{\infty}}{\infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4e^{4x+1}}{2x}$ มีรูปแบบ $\dfrac{4e^{\infty}}{\infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{16e^{4x+1}}{2} = \dfrac{16e^{\infty}}{2} = \infty$

4.2. ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบอื่นๆ

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \ 0\cdot\infty, \ \infty-\infty, \ 0^0, \ 1^{\infty}, \ \infty^0$

ลองใช้กฎของโลปิตาล

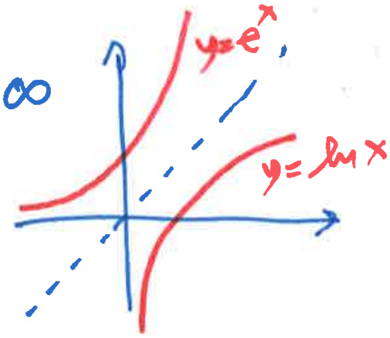
4.2.1 $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)$ ที่มีรูปแบบ $0\cdot\infty$

กลับ 1 ตัว $\quad 0\cdot\infty = \dfrac{0}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0}$

$0^{+}\cdot\infty = \dfrac{\infty}{\frac{1}{0^{+}}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$\Big\}$ ใช้กฎของโลปิตาลได้

Ex $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ มีรูปแบบ $0^+\cdot \ln 0^+ = 0^+\cdot -\infty$



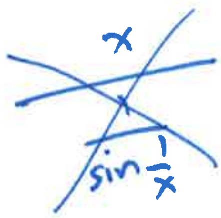
$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ มีรูปแบบ $\dfrac{-\infty}{\frac{1}{0^+}} = \dfrac{-\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}$

$= \lim_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x}\cdot x^2$

$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0$

Ex $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ มีรูปแบบ $\infty\cdot\sin 0 = \infty\cdot 0$



$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ มีรูปแบบ $\dfrac{\sin 0}{0} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos\frac{1}{x}\cdot\cancel{(-x^{-2})}}{\cancel{-x^{-2}}}$

$= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

4.2.2 $\lim_{x\to c} f(x)-g(x)$ ในรูป $\infty-\infty$

$\lim_{x\to\infty}(x^2-x) = \infty$

$\infty - \infty$

$\underline{\text{Ex}}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ มีรูปแบบ $\frac{1}{0^+}-\frac{1}{\sin 0^+}=\frac{1}{0^+}-\frac{1}{0^+}=\infty-\infty$

ลองจัดรูป

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$ มีรูปแบบ $\frac{0}{0}$ $\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}$ มีรูปแบบ $\frac{\cos 0-1}{0+\sin 0}=\frac{1-1}{0+0}=\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{-x\sin x+\cos x+\cos x}=\frac{-0}{-0+1+1}=0$

$\underline{\text{Ex}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$ มีรูปแบบ $\infty-\infty$

จัดรูป

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ $\qquad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ มีรูป $\frac{2}{\infty}$

$=0$

ทบทวนรูปแบบ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

<u>Ex</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1-e^x}{x^2}$ มีรูปแบบ $\dfrac{0+1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1-e^x)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+0-e^x}{2x}$$ มีรูปแบบ $\dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-e^x)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}$$

แบบอื่นๆ $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0

ทบทวน $0 \cdot \infty$ จัดรูปโดยกลับพจน์ซ้ายหรือขวา

$0 \cdot \infty \xrightarrow{\text{กลับซ้าย}} \dfrac{\infty}{\frac{1}{0}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$0 \cdot \infty \xrightarrow{\text{กลับขวา}} \dfrac{0}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0}$

แล้วใช้กฎของโลปิตาล

~~Ex~~ $\cancel{\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)}$ ~~มีรูปแบบ~~ $\cancel{\dfrac{1}{\ln 1} - \dfrac{1}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} - \dfrac{1}{0^+} = \infty - \infty}$

Ex $\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}$ มีรูปแบบ $\infty\cdot e^{-\infty} = \infty\cdot\frac{1}{e^{\infty}} = \infty\cdot 0$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x}}$ มีรูปแบบ $\frac{\infty}{e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x}}$ มีรูปแบบ $\frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty}$

$= 0$

ทบทวน $\infty - \infty$

ลองจัดรูปดูว่า จัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ได้หรือไม่

Ex $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$ มีรูปแบบ $\frac{1}{\ln 1^+} - \frac{1}{0^+} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = \infty - \infty$

$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)}\right)$ $\qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

มีรูปแบบ

$\frac{1-1-\ln 1}{(\ln 1)(1-1)} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{(\ln x)\cdot 1 + (x-1)\cdot\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{x}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1}$ มีรูปแบบ $\frac{0}{\ln 1 + 0} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\cdot\frac{1}{x} + \ln x + 1} = \frac{1}{1+\ln 1 + 1} = \frac{1}{2}$

ฟังก์ชันที่มีรูปแบบ 0^0, 1^∞ และ ∞^0

จัดรูป ให้ $y = f(x)^{g(x)}$

ขั้น 1 $\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$

ขั้น 2 $y = e^{\ln y} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Ex $\lim_{x \to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ มีรูปแบบ $1^{\frac{1}{0^+}} = 1^\infty$

จัดรูป ให้ $y = (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$

$$\ln y = \ln (1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \frac{\ln(1+3x)}{2x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$$ มีรูปแบบ $\frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+3x} \cdot 3}{2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2+6x} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y}$$

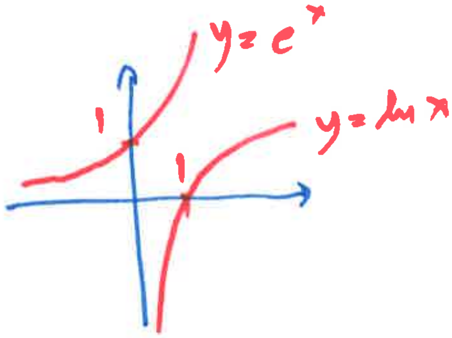
$$= e^{\lim_{x \to 0^+} \ln y} = e^{\frac{3}{2}}$$

ระวัง

Ex $\lim_{x \to 0^+} (3x+2)^{\frac{1}{x}}$ มีรูปแบบ $2^{\frac{1}{0^+}} = 2^\infty$

$= \infty$

Ex $\lim_{x\to 0^+} x^x$ มีรูปแบบ 0^0



Sol ให้ $y = x^x$

$$\ln y = \ln x^x = x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \quad \text{มีรูปแบบ } 0^+\cdot\ln 0^+ = 0\cdot -\infty$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \quad \text{มีรูปแบบ } \frac{\ln 0^+}{\frac{1}{0^+}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\cdot x^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x \quad = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} y$$

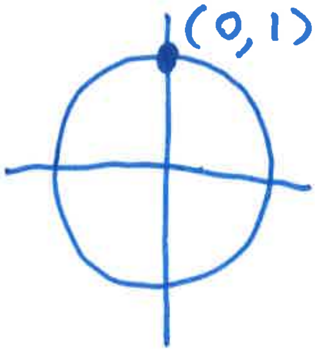
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} \ln y}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$

Ex $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$ มีรูปแบบ ∞^0



$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

$\tan\frac{\pi}{2}^- = \frac{1}{0^+} = \infty$

$\sec\frac{\pi}{2}^- = \frac{1}{0^+} = \infty$

Sol ให้ $y = (\tan x)^{\cos x}$

$\ln y = \ln(\tan x)^{\cos x}$

$\ln y = \cos x \ln(\tan x)$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln(\tan x)$

มีรูปแบบ $0 \cdot \ln\infty = 0\cdot\infty$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\sec x}$ มีรูปแบบ $\frac{\ln\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{\sec x\tan x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan^2 x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\ln y}$

$= \cancel{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}} e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y} = e^0 = 1$

Thm

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงบวก

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริง

Pf: 1. ให้ $y = \sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}}$

$$\ln y = \ln \alpha^{\frac{1}{n}} = \frac{\ln \alpha}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \alpha}{n}$$ มีรูปแบบ $\frac{\ln \alpha}{\infty}$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \ln y} = e^0 = 1$$

2. ให้ $y = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$

$$\ln y = \ln n^{\frac{1}{n}} = \frac{\ln n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$$ มีรูปแบบ $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$ มีรูปแบบ $\frac{1}{\infty}$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln y} = e^0 = 1$$

3. ให้ $y = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$

$$\ln y = \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln y = \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)$$ มีรูปแบบ $\infty\cdot\ln 1 = \infty\cdot 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}{n^{-1}}$$ มีรูปแบบ $\frac{\ln 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}\cdot(1+\alpha n^{-1})'}{-n^{-2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}\cdot(-\alpha n^{-2})}{-n^{-2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{n}}$$ มีรูปแบบ $\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{\infty}} = \frac{\alpha}{1+0}$

$$= \alpha$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\ln y} = e^{\alpha}$$