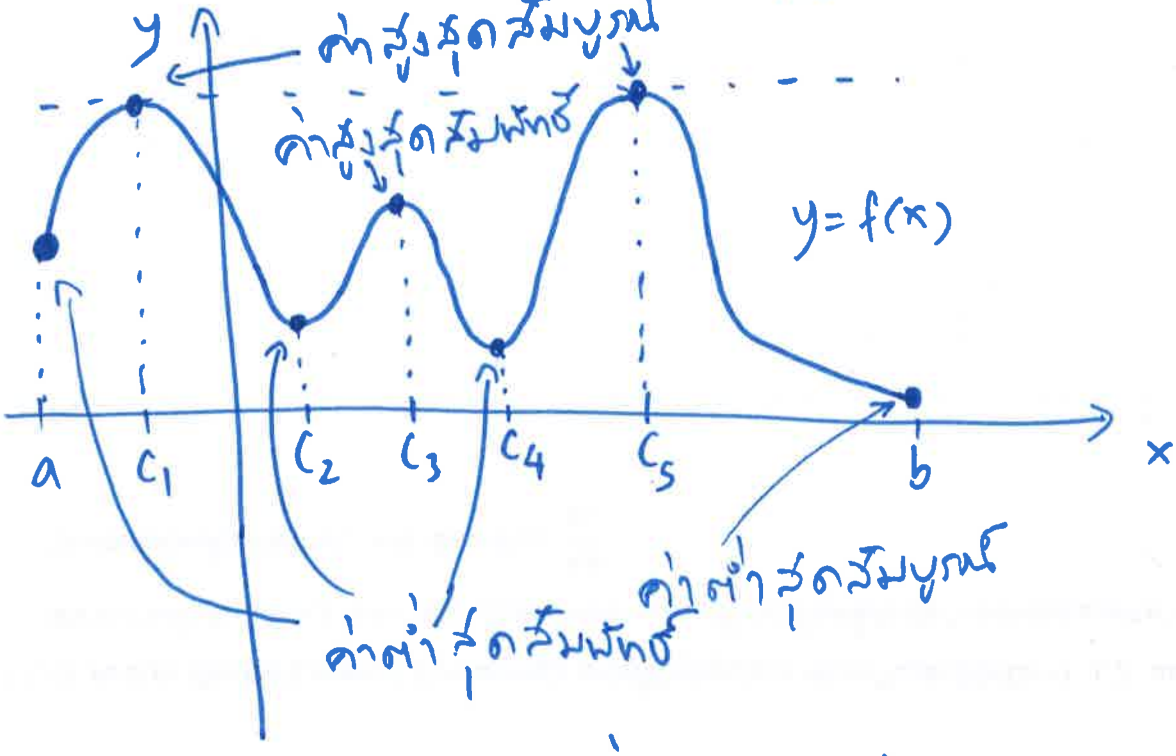
บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์

3.1 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้



Def ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ $c \in I$

เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ c ถ้า $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in I$ และเรียก $f(c)$ ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน I

เรากล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ c ถ้า $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in I$ และเรียก $f(c)$ ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน I

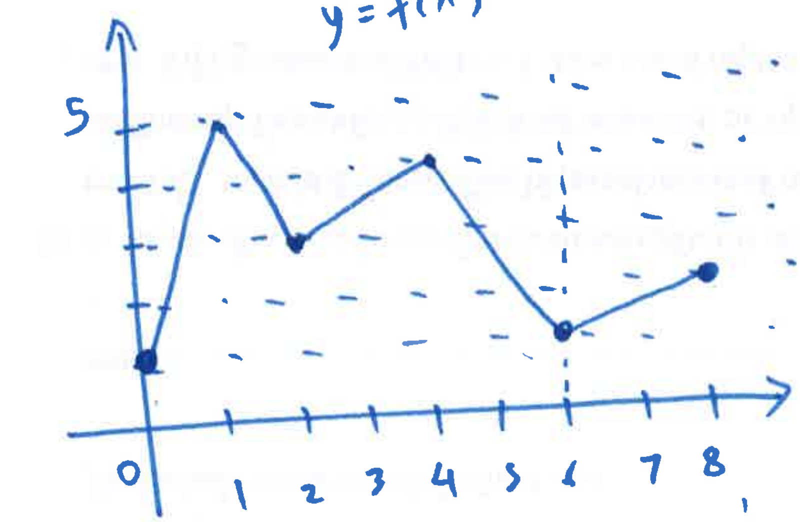
• เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c ถ้ามีช่วง (a,b) ที่ $c \in (a,b)$ และ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ และเรียก $f(c)$ ว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

• เรากล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c ถ้ามีช่วง (a,b) ที่ $c \in (a,b)$ และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ และเรียก $f(c)$ ว่าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

• เราเรียกค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (global maximum) และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (global minimum) ว่าค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (global extrema, absolute extrema)

• เราเรียกค่าสัมพัทธ์ (local maximum) และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (local minimum) ว่าค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (local extrema, relative extrema)

Ex



ค่า~~...~~สูงสุดสัมบูรณ์ของ f เกิดที่ $x=1$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(1)=5$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f เกิดที่ $x=0$ และ $x=6$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(0)=f(6)=1$

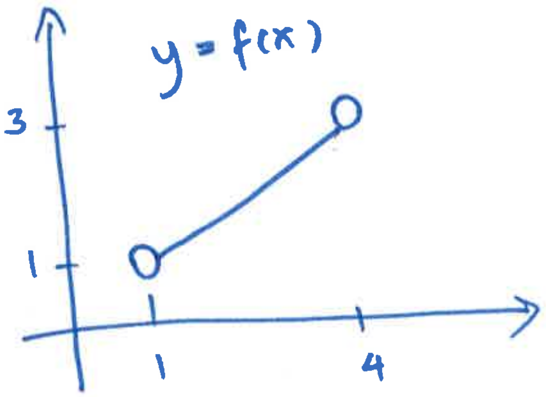
ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เกิดที่ $x=1$, $x=4$ และ $x=8$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(1)=5$, $f(4)=4$ และ $f(8)=3$ ตามลำดับ

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เกิดที่ $x=0$, $x=2$ และ $x=6$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(0)=1$, $f(2)=3$ และ $f(6)=1$ ตามลำดับ

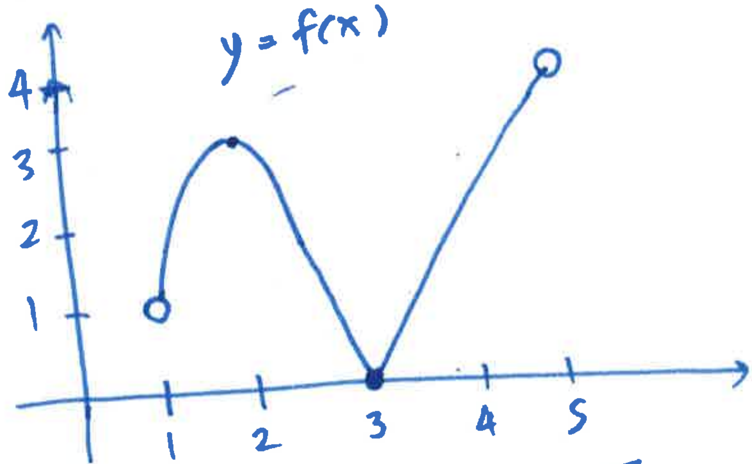
Ex



f ไม่มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์

และไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

Ex



f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์

f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=3$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(3)=0$

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=2$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(2)=3$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=3$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(3)=0$

Thm (ท.บ.ค่าสุดขีด : extreme value theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$
แล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a,b]$

เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ไม่เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์

เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ความชันหาค่าไม่ได้

Thm ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ $c \in I$
ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว $f'(c)=0$
หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

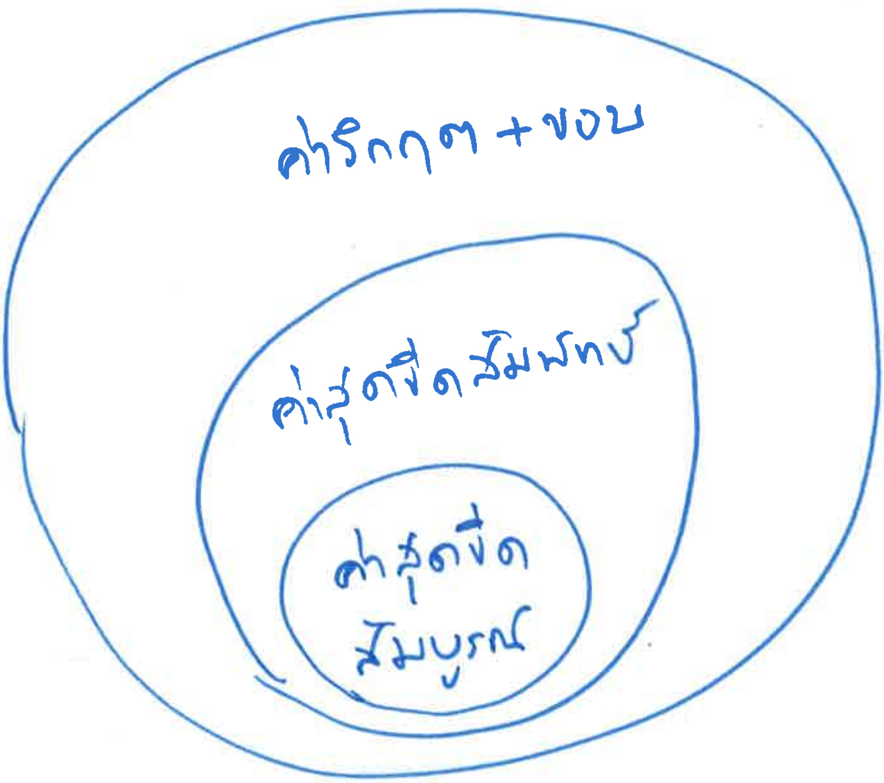
Def เราเรียกค่า c ในโดเมนของฟังก์ชัน f
ที่ $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ว่า
<u>ค่าวิกฤต/จุดวิกฤต</u> (critical point)

$\therefore$ Thm ก่อนหน้าเขียนใหม่ได้เป็น
ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว c เป็นจุดวิกฤต

Thm

- ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันจะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ด้วย
- ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันจะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ด้วย

สรุป



Ex จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน
$f(x) = x^3 - 12x$ เมื่อ $x \in [-3, 5]$

Sol เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[-3, 5]$
$\therefore f$ มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[-3,5]$

หาจุดวิกฤต
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$
$\therefore f'(x) = 0 \iff x = 2, -2$ จุดวิกฤต

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$
$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$

หาค่าขอบ
$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$
$f(5) = 5^3 - 12(5) = 125 - 60 = 65$

$\therefore f$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 5$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(5) = 65$
f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 2$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(2) = -16$ $\square$

สรุปขั้นตอนการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f บน $[a,b]$

(1) หาจุดวิกฤต c และค่า $f(c)$

(2) หาค่าขอบ $f(a)$ และ $f(b)$

(3) เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันในข้อ (1) และ (2)
ค่าที่มากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
ค่าที่น้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

Ex จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ บน $[-1, 8]$

Sol เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[-1, 8]$

$\therefore$ f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[-1, 8]$

หาจุดวิกฤต

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x)$ หาค่าไม่ได้ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ จุดวิกฤต

$$f(0) = 1$$

หาค่าขอบ

$$f(-1) = 1 - (-1)^{\frac{2}{3}} = 1 - 1 = 0$$

$$f(8) = 1 - 8^{\frac{2}{3}} = 1 - 64^{\frac{1}{3}} = 1 - 4 = -3$$

$\therefore$ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(0) = 1$

f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 8$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(8) = -3$

Ex จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 5x + 9, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Sol สังเกตว่า f ต่อเนื่องบน $[0, 3]$

$\therefore$ f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[0, 3]$

หาจุดวิกฤต

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 2 \\ 2x - 5, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

เมื่อ ~~f~~ $0<x<2$ จะได้ $f'(x) = 2 \neq 0$

เมื่อ $2<x<3$ จะได้ $f'(x)=0 \iff 2x-5=0$

$\iff x = \frac{5}{2}$ จุดวิกฤต

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 9$$
$$= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9$$
$$= -\frac{25}{4} + 9$$
$$= \frac{-25+36}{4} = \frac{11}{4}$$

เหลือ $x=2$ ที่ยังไม่ได้เช็คว่าเป็นจุดวิกฤตหรือไม่

$f(2) = 3$

<u>หาค่าขอบ</u>

$f(0) = -1$

$f(3) = 3^2 - 5\cdot 3 + 9 = 9 - 15 + 9 = 3$

$\therefore$ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=2$ และ $x=3$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(2)=f(3)=3$