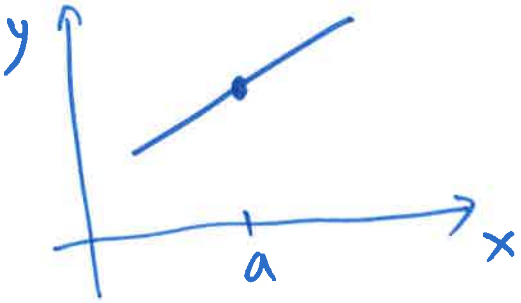
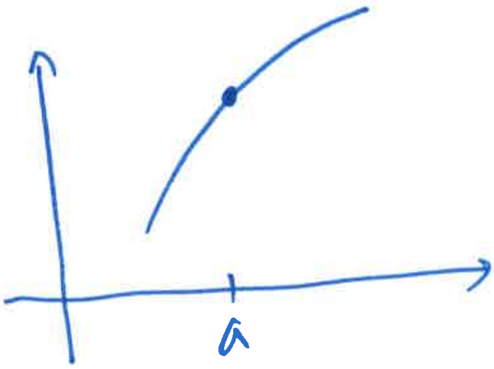
22 มี.ค. 60

ทบทวน

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{ความชัน}$$

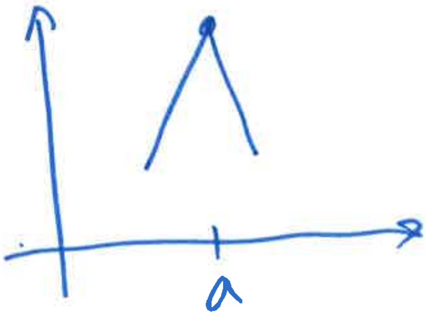
ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ที่ $x=a$

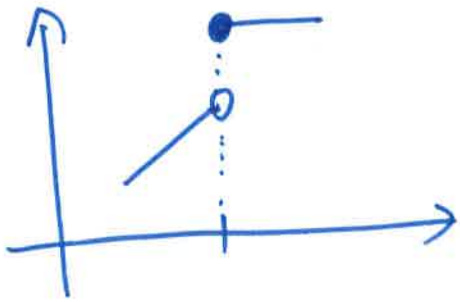


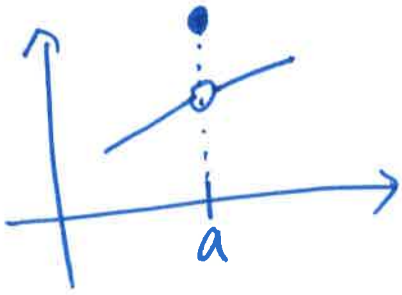


smooth
เนียน

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ไม่ได้ ที่ $x=a$







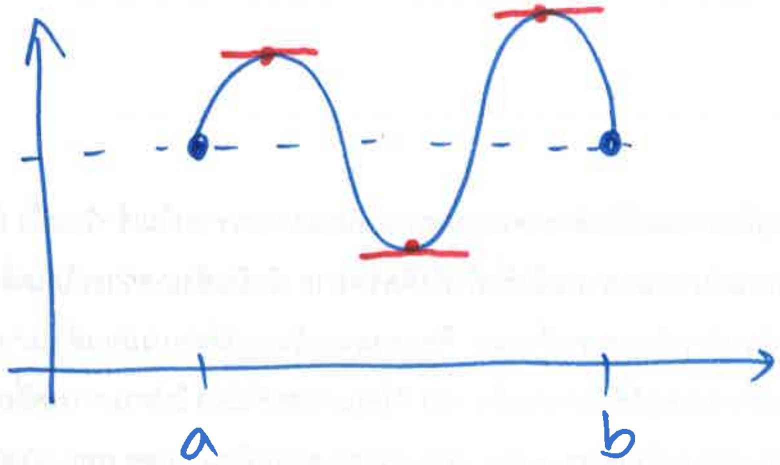
not smooth
ขรุขระ

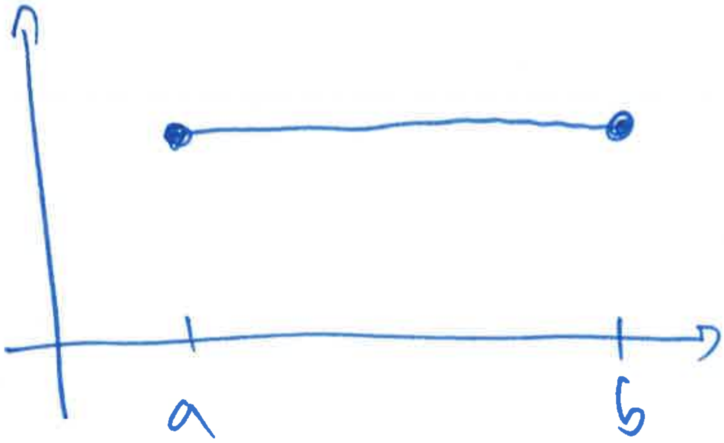
3.2 ทฤษฎีบทของโรลล์และทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

Thm (ทฤษฎีบทของโรลล์ : Rolle's Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) โดยที่ $f(a)=f(b)$
แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ที่ $f'(c)=0$

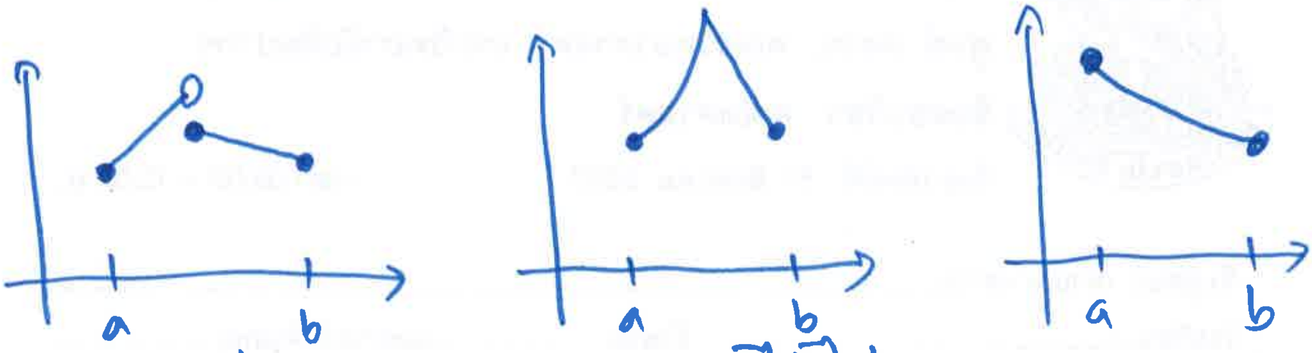
ความชันเป็น 0





ในกราฟที่ต่อเนื่องและ smooth
ถ้าระดับเริ่มต้นและระดับสุดท้ายเท่ากัน
จะต้องมีจุดที่ความชันเป็น 0

ตัวอย่างกราฟที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์



ไม่ต่อเนื่อง | หาอนุพันธ์ไม่ได้ในบางจุด | $f(a) \neq f(b)$

Ex จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x} - x$ บน $[0,1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ของโรลล์ และจงหาค่าของ c ซึ่ง $f'(c) = 0$

Sol ① เห็นได้ชัดว่า f ต่อเนื่องบน $[0,1]$

② $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} - x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ $(0,1)$

③ $f(0) = 0 - 0 = 0$

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$\therefore$ f สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ของโรลล์

ดังนั้นจะมี $c \in (0,1)$ ที่ $f'(c) = 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = 1$$

$$1 = 2\sqrt{c}$$

$$\sqrt{c} = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{4}$$

Ex จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ บน $[-1, 1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ของโรลล์หรือไม่ ถ้าสอดคล้อง จงหาค่า c ที่ $f'(c) = 0$

Sol ① เห็นได้ชัดว่า f ต่อเนื่องบน $[-1, 1]$

② $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$

และ $0 \in (-1, 1)$

$\therefore$ f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ของโรลล์

Ex จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = (x-1)\sin x$ บน $[0, 1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ของโรลล์ และใช้ผลนี้แสดงว่าสมการ $\tan x + x = 1$ มีคำตอบอยู่ใน $(0, 1)$

Sol ① เห็นได้ชัดว่า f ต่อเนื่องบน $[0, 1]$

② $$f'(x) = (x-1)(\sin x)' + \sin x \cdot (x-1)'$$
$$= (x-1)\cos x + \sin x$$

ซึ่งหาค่าได้บน $(0, 1)$

③ $$f(0) = (0-1)\sin 0 = 0$$
$$f(1) = (1-1)\sin 1 = 0$$

$\therefore$ f สอดกับเงื่อนไขของ ท.บ. ของโรลล์

โดย ท.บ. ของโรลล์จะมี $c \in (0, 1)$ ที่ $f'(c) = 0$

$$(c-1)\cos c + \sin c = 0$$
$$c - 1 + \frac{\sin c}{\cos c} = 0$$
$$c + \tan c = 1$$

$\therefore$ $c \in (0, 1)$ เป็นคำตอบของสมการ $\tan x + x = 1$

Ex จงแสดงว่าสมการ $x^3+3x^2+6x+k=0$
มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอย่างมากคำตอบเดียว
ไม่ว่า k จะเป็นค่าคงที่ใดๆ

Sol สมมติว่าสมการข้างต้น มีคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ
ให้ x_1 และ x_2 เป็นสองคำตอบของสมการข้างต้น
และ $x_1 < x_2$
พิจารณาว่า $f(x) = x^3+3x^2+6x+k$ บน $[x_1, x_2]$ สอดคล้องกับเงื่อนไข
ของ ท.บ. ของโรลล์หรือไม่

① เห็นได้ชัดว่า f ต่อเนื่องบน $[x_1, x_2]$
② $f'(x) = 3x^2+6x+6$ ซึ่งหาค่าได้บน (x_1, x_2)
③ $f(x_1) = 0 = f(x_2)$

$\therefore$ f สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ของโรลล์
โดย ท.บ. ของโรลล์ จะมี $c \in (x_1, x_2)$ ที่ $f'(c) = 0$

$$3c^2+6c+6 = 0$$
$$c^2+2c+2 = 0$$
$$(c^2+2c+1)+1 = 0$$
$$\underbrace{\underbrace{(c+1)^2}_{\geq 0}+1}_{\geq 1} = 0$$

เกิดข้อขัดแย้ง

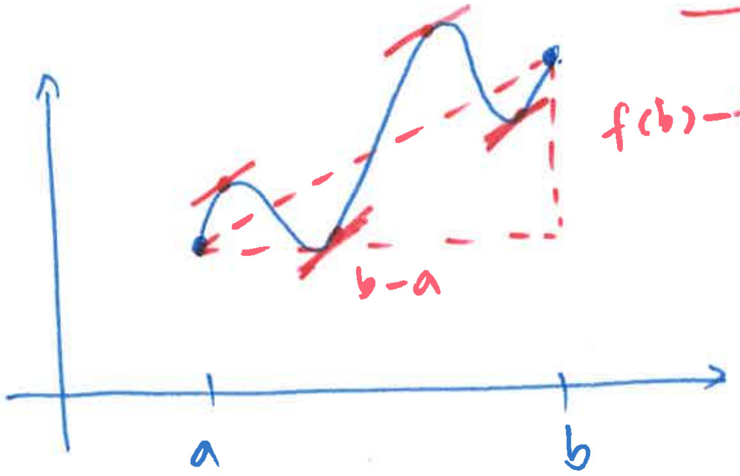
$\therefore$ ที่สมมติไม่จริง
$\therefore$ สมการ $x^3+3x^2+6x+k=0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง
อย่างมาก 1 คำตอบ $\square$

ทฤษฎีบท (ท.บ.ค่ามัชฌิม : Mean Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ① และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) ②

แล้ว จะมี $c \in (a,b)$ ที่ $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ความชันของเส้นตรง ที่เชื่อมระหว่าง จุดเริ่มต้น และจุดสุดท้าย



Ex จง ~~[illegible]~~ พิจารณาว่า $f(x) = x^3 - 8x - 5$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ค่ามัชฌิมบน $[1,4]$ หรือไม่ ถ้าสอดคล้อง จงหาค่า $c \in (1,4)$ ที่สอดคล้องกับบทสรุปของ ท.บ. ค่ามัชฌิม

Sol ① เห็นได้ชัด f ต่อเนื่องบน $[1,4]$

② $f'(x) = 3x^2 - 8$ ซึ่งหาค่าได้บน $(1,4)$

$\therefore$ f สอดคล้องกับเงื่อนไขของ ท.บ. ค่ามัชฌิมบน $[1,4]$

โดย ท.บ.ค่ามัชฌิม จะมี $c \in (1,4)$ ที่

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{(4^3-8(4)\cancel{-5})-(1^3-8(1)\cancel{-5})}{3}$$

$$f'(c) = \frac{64-32-1+8}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

$$3c^2 - 8 = 13$$

$$c^2 = \frac{13+8}{3} = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow c = \pm\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{7} \in (1,4)$$

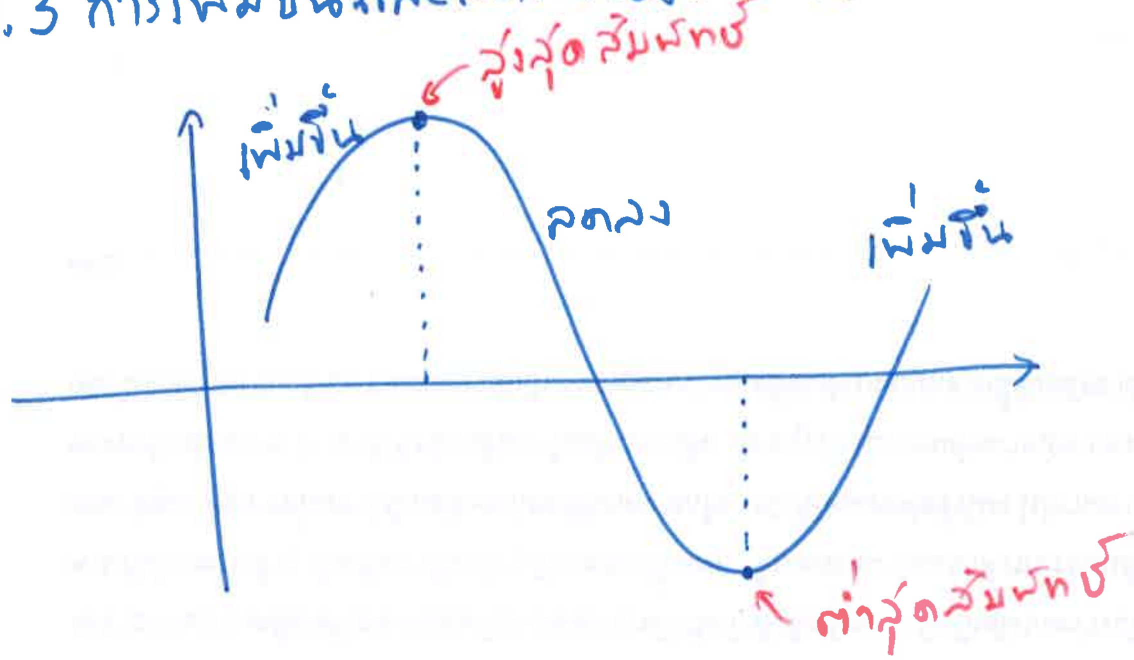
ทำแบบฝึกหัด 3.1

1. คี่ 2. คี่

ทำแบบฝึกหัด 3.2

1. คี่ 2. คี่

3.3 การเพิ่มขึ้นและลดลงของฟังก์ชัน

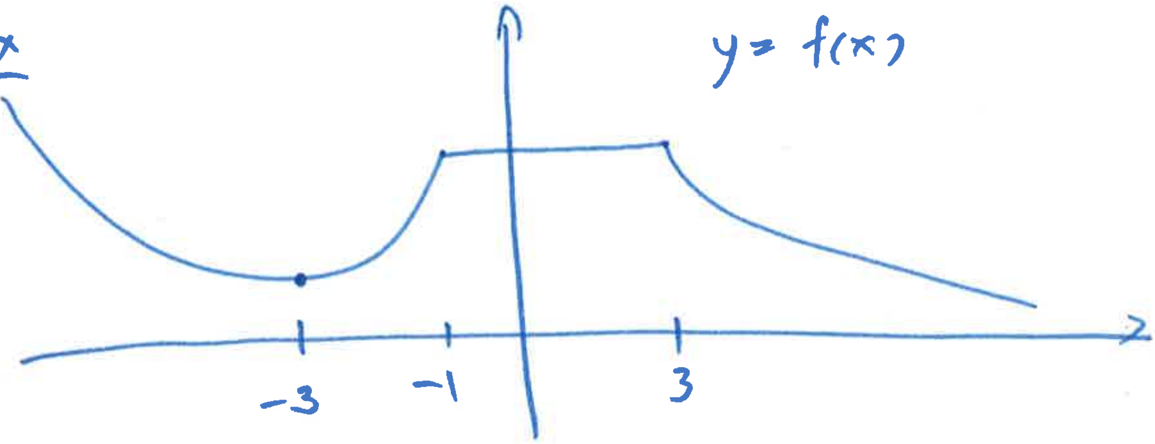


Def เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง I ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in I$ ที่ $x_1 < x_2$

เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง I ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in I$ ที่ $x_1 < x_2$

และกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันคงตัว (constant function) บนช่วง I ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in I$

Ex



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[-3,-1]$

f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,-3]$ และบน $[3,\infty)$

f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน $[-1,3]$

Thm ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

(1) ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุกๆ x ใน (a,b) ~~แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม~~
แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$

(2) ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุกๆ x ใน (a,b)
แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบน $[a,b]$

Ex ให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

Sol หาจุดที่ $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$= 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 3(x+1)(x-3)$$

$\therefore f'(x) = 0 \iff x = -1, 3$

$f'(-2) = - \cdot - = +$ $\quad$ -1 $\quad$ $f'(0) = + \cdot - = -$ $\quad$ 3 $\quad$ $f'(4) = + \cdot + = +$

$f'(x)$ $\quad + \quad - \quad +$

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, -1]$ และบน $[3, \infty)$

f เป็นฟังก์ชันลดบน $[-1, 3]$

Ex

ให้ $f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

Sol หาจุดที่ $f'(x) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x$$

$$= \frac{4x}{3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{4x}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x)$ หาค่าไม่ได้ $\iff x = 1, -1$

$f'(-2) = \frac{-}{-\cdot -} = -$ $\quad$ -1 $\quad$ $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-}{-\cdot +} = +$ $\quad$ 0 $\quad$ $f'(\frac{1}{2}) = \frac{+}{-\cdot +} = -$ $\quad$ 1 $\quad$ $f'(2) = \frac{+}{+\cdot +} = +$

$f'(x)$ $\quad -\quad +\quad -\quad +$

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[-1, 0]$ และบน $[1, \infty)$

f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, -1]$ และบน $[0, 1]$