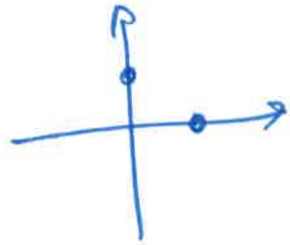
30 มี.ค. 50

3.5 การวาดกราฟ

จุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y

(ค่า $y=0$) (ค่า $x=0$)

x-intercept y-intercept



Ex ให้ $f(x)=x^2-3x-4$ จงหาจุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y

จุดตัดแกน y : ให้ $x=0$

$f(0)=-4$

$\therefore (0,-4)$ เป็นจุดตัดแกน y

จุดตัดแกน x : ให้ $y=0$

$x^2-3x-4=0$

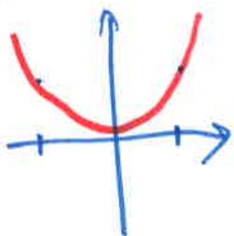
$(x+1)(x-4)=0$

$x=-1, 4$

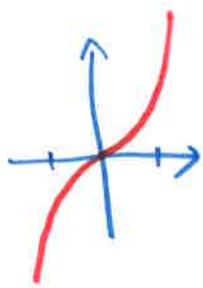
$(-1,0)$ และ $(4,0)$ เป็นจุดตัดแกน x

สมมาตร

Def กราฟของฟังก์ชัน f สมมาตรเทียบกับแกน y (symmetric with respect to the y-axis) ถ้า $f(-x)=f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f



กราฟของฟังก์ชัน f สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด (symmetric with respect to the origin) ถ้า $f(-x)=-f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f



หมายเหตุ กราฟ $y=0$ (แกน y) เป็นฟังก์ชันชนิดเดียวที่สมมาตรครบทั้ง 2 แบบ

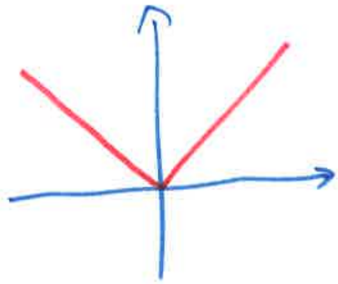
$\therefore$ ฟังก์ชันๆหนึ่ง (ที่ไม่ใช่ $y=0$) จะมีสมมาตรได้
อย่างมาก 1 สมมาตร

Ex จงตรวจสอบว่ากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้
มีสมมาตรอะไรบ้าง

(1) $f(x)=|x|$

$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$

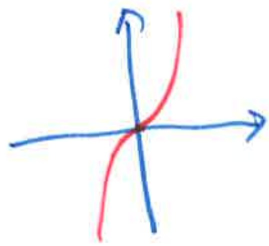
$\therefore$ f สมมาตรเทียบกับแกน y



(2) $f(x)=x^3$

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

$\therefore$ f สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

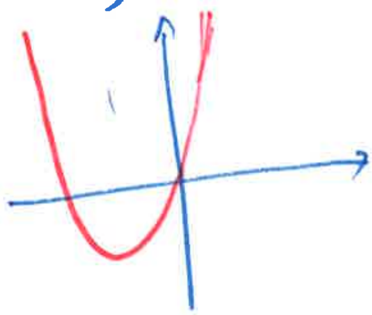


(3) $f(x)=x^2+x$

$f(-x)=(-x)^2-x=x^2-x \neq f(x)$

$\neq -x^2-x=-f(x)$

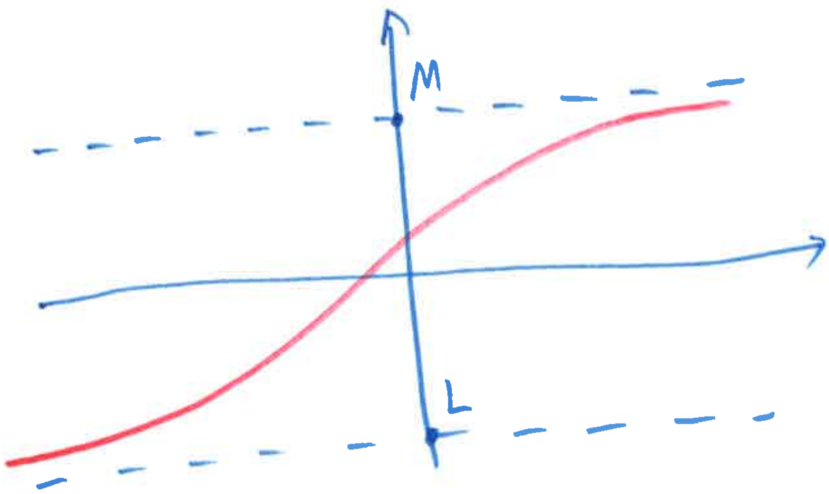
$\therefore$ f ไม่มีสมมาตรเทียบกับแกน y
และไม่มีสมมาตรเทียบกับ
จุดกำเนิด



เส้นกำกับ

Def เรากล่าวว่าเส้นตรง $y=b$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน (horizontal asymptote) ของกราฟของ f ถ้า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



Ex จงหาเส้นกำกับแนวนอนของ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Sol

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

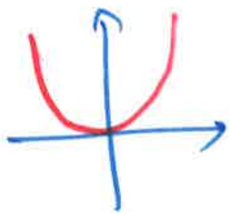
$\therefore$ $y=1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f

Ex จงหาเส้นกำกับแนวนอนของ $f(x) = x^2$

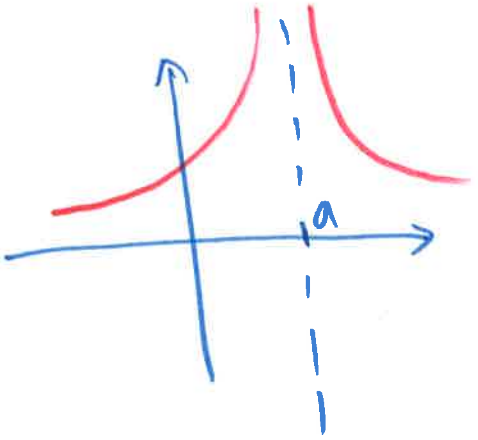
Sol

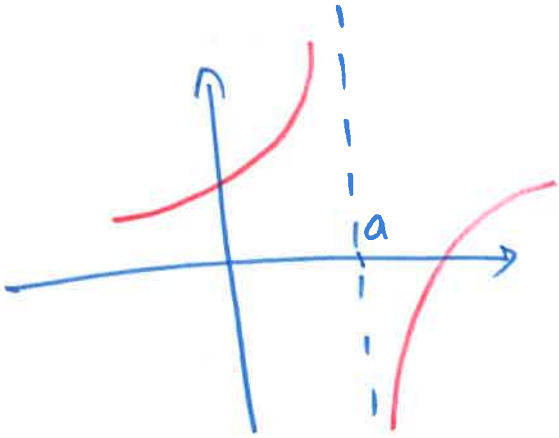
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$



$\therefore$ $f(x)=x^2$ ไม่มีเส้นกำกับแนวนอน





Def เรากล่าวว่าเส้นตรง $x=a$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้ง (vertical asymptote) ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

สังเกตว่า เส้นกำกับแนวตั้งจะเกิดขึ้นได้เฉพาะบริเวณที่กราฟไม่ต่อเนื่องเท่านั้น

Ex จงหาเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}$

Sol โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$

$\therefore$ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1, -1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^+\cdot 2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^-\cdot 2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{-2\cdot 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{-2\cdot 0^-} = \infty$$

$\therefore$ เส้นตรง $x=1$ และ $x=-1$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของ f

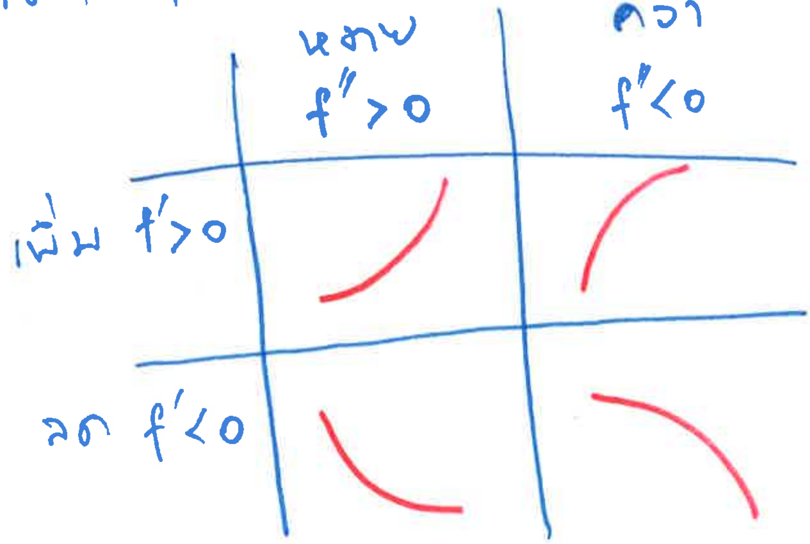
Ex จงหาเส้นกำกับแนวตั้งของ $f(x) = 2x+1$

Sol เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

$\therefore$ f ไม่มีเส้นกำกับแนวตั้ง

$\boxed{\text{ขั้นตอนการวาดกราฟ } y = f(x)}$

1. หาโดเมนของ f
2. หาจุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y
3. ตรวจสอบสมมาตรเทียบกับแกน y และจุดกำเนิด
4. หาเส้นกำกับแนวนอนและแนวตั้ง
5. หาจุดวิกฤต
6. หาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ($f' > 0$) และช่วงที่เป็นฟังก์ชันลด ($f' < 0$)
7. หาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f
8. หาช่วงที่ f เป็นโค้งหงายและช่วงที่ f เป็นโค้งคว่ำ
9. หาจุดเปลี่ยนความเว้า
10. ใช้ 1-9 วาดกราฟ



Ex จงวาดกราฟของ $f(x) = 3x^4-4x^3$

Sol 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

2. หาจุดตัดแกน y : ให้ $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$(0,0)$ เป็นจุดตัดแกน y

หาจุดตัดแกน x : ให้ $y = 0$

$$3x^4-4x^3 = 0$$

$$x^3(3x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0, \frac{4}{3}$$

$\therefore (0,0)$ และ $(\frac{4}{3},0)$ เป็นจุดตัดแกน x

3. ตรวจสอบสมมาตร

$$f(-x) = 3(-x)^4-4(-x)^3 = 3x^4+4x^3 \neq f(x)$$

$$\neq -3x^4+4x^3 = -f(x)$$

$\therefore f$ ไม่มีสมมาตรทั้ง 2 แบบ

4. หาเส้นกำกับแนวนอน

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 3x^4-4x^3 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^4-4x^3 = \infty$$

$\therefore f$ ไม่มีเส้นกำกับแนวนอน

หาเส้นกำกับแนวตั้ง

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

f ไม่มีเส้นกำกับแนวตั้ง

5. หาจุดวิกฤต

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

$f'(x) = 0 \iff x = 0, 1$

ไม่มี x ที่ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

$\therefore x = 0, 1$ เป็นจุดวิกฤต

6. หาช่วง ↑/↓

$f'(-1) = + \cdot -$ $\quad f'(0.5) = + \cdot -$ $\quad f'(2) = + \cdot +$

		0		1	
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$
ลักษณะกราฟ	ลด		ลด		เพิ่ม

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 0]$ และ $[0, 1]$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[1, \infty)$

7. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ ซึ่งมีค่า $f(1) = 3 - 4 = -1$

f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

8. หาช่วงหงาย/คว่ำ

$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$

$f''(x) = 0 \iff x = 0, x = \frac{2}{3}$

ไม่มี x ที่ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้

$f''(-1) = - \cdot -$ $\quad f''(0.5) = + \cdot -$ $\quad f''(1) = + \cdot +$

		0		$\frac{2}{3}$	
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
ลักษณะกราฟ	หงาย		คว่ำ		หงาย

f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, 0]$ และ $[\frac{2}{3}, \infty)$

f เป็นโค้งคว่ำบน $[0, \frac{2}{3}]$

9. $f(0) = 0$

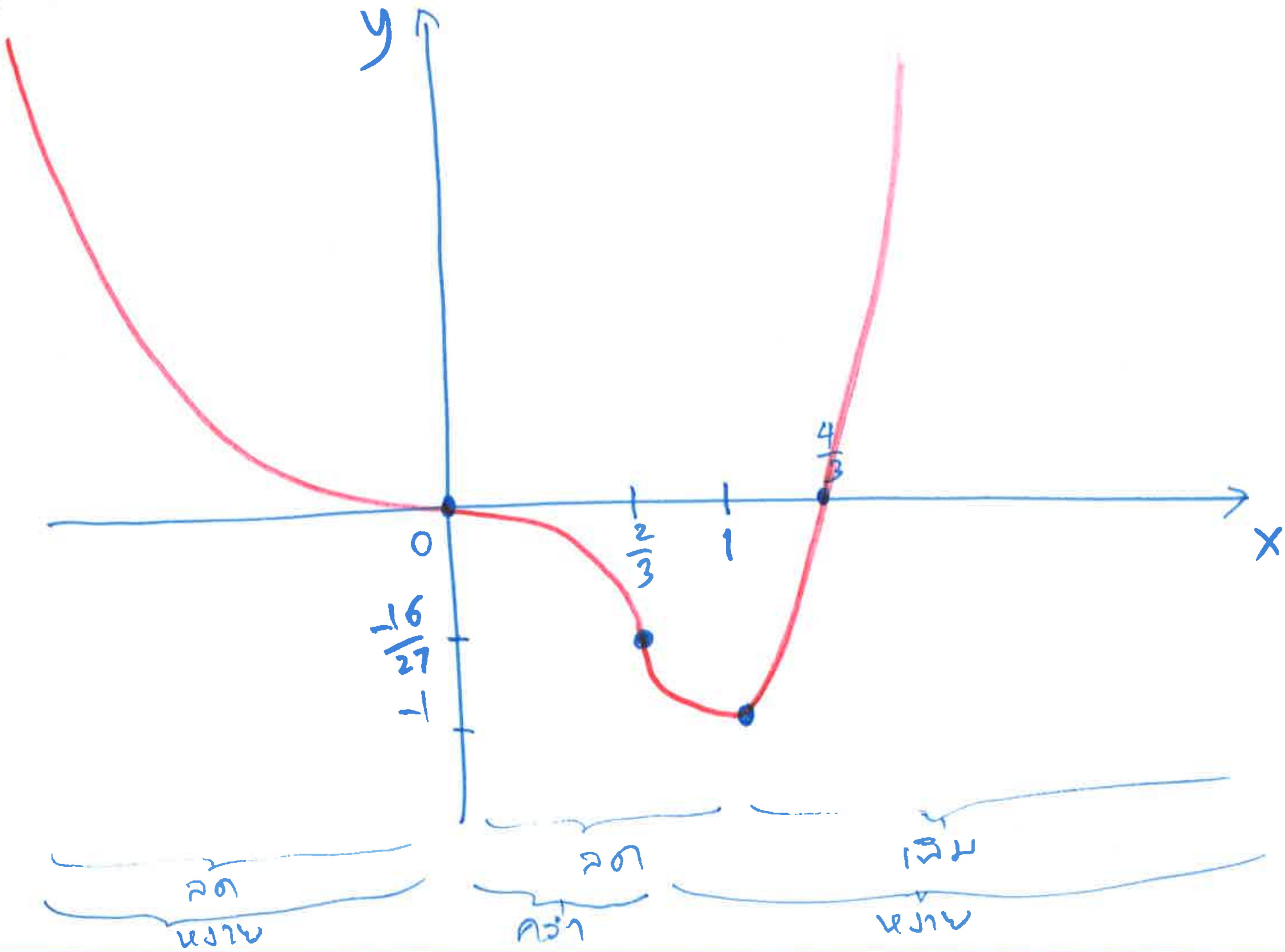
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 3\cdot\frac{2^4}{3^4} - 4\cdot\frac{2^3}{3^3}$$

$$= \frac{2^4}{3^3} - 4\cdot\frac{2^3}{3^3}$$

$$= \frac{16}{27} - \frac{32}{27}$$

$$= -\frac{16}{27}$$

$(0,0)$ และ $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของ f



Ex จงวาดกราฟของ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}$

Sol 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$

2. หาจุดตัดแกน y : ให้ $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$(0,0)$ เป็นจุดตัดแกน y

หาจุดตัดแกน x : ให้ $y = 0$

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 0$$

$$x = 0$$

$(0,0)$ เป็นจุดตัดแกน x

4 หาเส้นกำกับแนวนอน

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$\therefore$ $y=1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน

หาเส้นกำกับแนวตั้ง

(ดูตัวอย่างก่อนหน้า 3 ตัวอย่างที่แล้ว)

$x=1$ และ $x=-1$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้ง

3. ตรวจสอบสมมาตร

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{x^2}{x^2-1} = f(x)$$

$\therefore$ f มีสมมาตรเทียบกับแกน y

5. หาจุดวิกฤต

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 2x - x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=0$

$f'(x)$ หาค่าไม่ได้ $\iff x=1,-1$ ซึ่งไม่อยู่ในโดเมน

$\therefore x=0$ เป็นจุดวิกฤต

6. หาช่วง $\uparrow / \downarrow$ $\quad f'(-2)=\frac{+}{+} \quad f'(-0.5)=\frac{+}{+} \quad f'(0.5)=\frac{-}{+} \quad f'(2)=\frac{-}{+}$

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
f'	+	+	−	−
ลักษณะกราฟ	เพิ่ม	เพิ่ม	ลด	ลด

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,-1)$ และ $(-1,0]$

f เป็นฟังก์ชันลดบน $[0,1)$ และ $(1,\infty)$

7. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ ซึ่งมีค่า $f(0)=0$

f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

8. หาช่วงหงาย/คว่ำ

$$f''(x) = \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(x^2-1)^2\cdot -2 - (-2x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2-1)\left[(x^2-1)\cdot(-1) + 4x^2\right]}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{2[1+3x^2]}{(x^2-1)^3}$$

ไม่มี x ที่ $f''(x)=0$ เพราะว่า $1+3x^2 \geq 1$

$f''(x)$ หาค่าไม่ได้ $\Longleftrightarrow$ $x = 1, -1$

		$f''(-2) = \frac{+}{+}$		$f''(0) = \frac{+}{-}$		$f''(2) = \frac{+}{+}$
			-1		1	
$f''(x)$		$+$		$-$		$+$
ลักษณะกราฟ		หงาย		คว่ำ		หงาย

$\therefore$ f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, -1)$ และ $(1, \infty)$

f เป็นโค้งคว่ำบน $(-1, 1)$

9. เนื่องจาก $1, -1$ ไม่อยู่ในโดเมน

f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า