3.6 การประยุกต์เรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ปัญหาในรูปภาษาทั่วไป

↓ แปลปัญหา

ปัญหาในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์

↓ หาคำตอบ

คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

↓ แปลผล

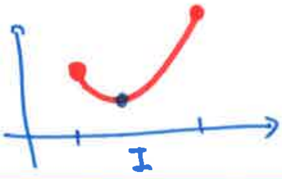
คำตอบของปัญหาที่อยู่ในรูปภาษาทั่วไป

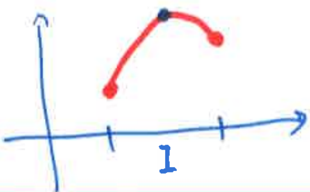
ในที่นี้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด หมายถึงค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

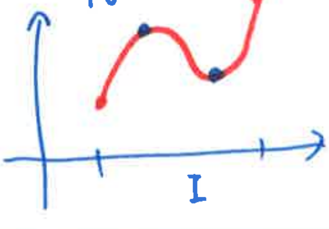
<u>Thm</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ซึ่งหาอนุพันธ์บนทุก ๆ จุดใน I ที่ไม่ใช่จุดปลายของช่วง I และ f มีจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวโดยที่ $f'(c)=0$

ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสุดสัมพัทธ์ของ f แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f

จุดวิกฤต 2 จุด ใช้ ท.บ. นี้ไม่ได้







- ทบทวนการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนช่วงปิด [a, b] ของฟังก์ชัน f

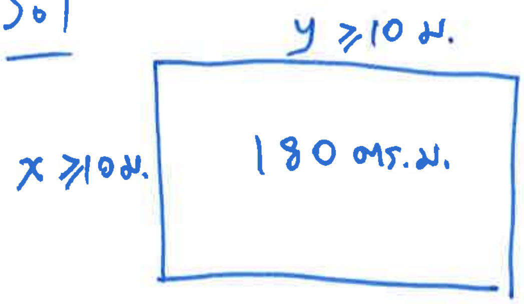
1. หาจุดวิกฤตของ f
2. หาค่าของ f ที่จุดวิกฤตในข้อ 1
3. หาค่าของ f ที่ขอบของ [a, b] นั่นคือ f(a) และ f(b)
4. ค่าในข้อ 2 และ 3 ที่มากสุดจะเป็นค่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์

   ค่าในข้อ 2 และ 3 ที่น้อยสุดจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

- การหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนช่วง I ที่อาจไม่ช่วงปิด ของฟังก์ชัน f ถ้า f มีจุดวิกฤตเพียงจุดเดียว อาจใช้ Thm ข้างต้นในการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์

<u>Ex</u> ชายคนหนึ่งต้องการทำรั้วให้สนามของตนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ 180 ตร.ม. โดยแต่ละด้านต้องยาวอย่างน้อย 10 เมตร เขาควรจะกำหนดความกว้างและยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นเท่าใด จึงจะประหยัดค่ารั้วมากที่สุด

<u>Sol</u>



ให้ x เป็นความยาวของด้านกว้างของ $\boxed{\text{ผ}}$ (หน่วยเป็น ม.)

y เป็นความยาวของด้านยาวของ $\boxed{\text{ผ}}$ (หน่วยเป็น ม.)

p เป็นความยาวเส้นรอบรูปของ $\boxed{\text{ผ}}$ (หน่วยเป็น ม.)

สิ่งที่โจทย์ต้องการ คือ การหาค่าต่ำสุดของ $P = 2x + 2y$

โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$x \geq 10, \; y \geq 10$

$xy = 180 \implies y = \frac{180}{x}$

เปลี่ยน P ให้เป็นตัวแปรเดียว

$$P(x) = 2x + 2\cdot\frac{180}{x} = 2x + \frac{360}{x} = 2x + 360x^{-1}$$

เนื่องจาก $x = \frac{180}{y}$ และ $y \geq 10$

$$\frac{1}{10} \geq \frac{1}{y}$$

$$18 = \frac{180}{10} \geq \frac{180}{y} = x$$

$\therefore x \leq 18$

$\therefore$ โดเมนของ P คือ $[10, 18]$ ซึ่งเป็นช่วงปิด

หาจุดวิกฤต

$$P'(x) = 2 - 360x^{-2} = 2 - \frac{360}{x^2} = \frac{2x^2 - 360}{x^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - 180)}{x^2} = \frac{2(x - \sqrt{180})(x + \sqrt{180})}{x^2}$$

$P'(x) = 0 \iff x = \sqrt{180}, -\sqrt{180}$

$P'(x)$ หาค่าไม่ได้ $\iff x = 0$ ไม่อยู่ในโดเมน

$\therefore$ มีจุดวิกฤตจุดเดียวคือ $x = \sqrt{180}$

$$P(\sqrt{180}) = 2\sqrt{180} + \frac{360}{\sqrt{180}} \approx 53.67 \leftarrow \text{ต่ำสุด}$$

หาค่าขอบ

$$P(10) = 2(10) + \frac{360}{10} = 20 + 36 = 56$$

$$P(18) = 2(18) + \frac{360}{18} = 36 + 20 = 56$$

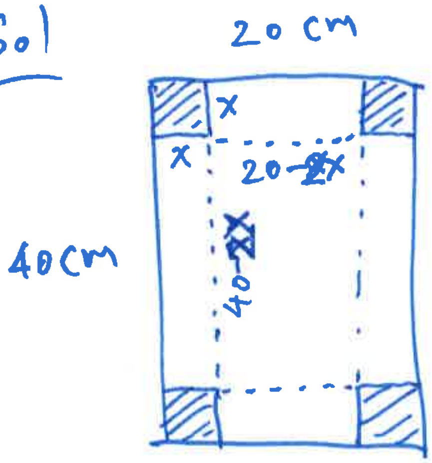
∴ P มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = \sqrt{180}$ ซึ่งมีค่า $P(\sqrt{180}) \approx 53.67$

เมื่อ $x = \sqrt{180}$, $y = \frac{180}{x} = \frac{180}{\sqrt{180}} = \sqrt{180}$

∴ เขาควรล้อมรั้วเป็นรูป $\boxed{ผ}$ ที่กว้าง $\sqrt{180}$ ม. และยาว $\sqrt{180}$ ม.

Ex มีกระดาษรูป $\boxed{ผ}$ แผ่นหนึ่งขนาด 20 ซม x 40 ซม.
ต้องการตัดมุมทั้ง 4 ออกเป็น $\boxed{จ}$ 4 รูปที่เท่ากัน
เพื่อพับเป็นกล่อง (ด้านบนโล่ง) ต้องตัดมุมเป็น
รูป $\boxed{จ}$ ขนาดใดจึงจะได้กล่องที่มีความจุมากที่สุด

Sol



ให้ x เป็นความด้านของ $\boxed{จ}$ ที่จะตัดออก (หน่วยเป็น ซม)
V แทนปริมาตรของกล่อง (หน่วยเป็น ซม^3)

~~เราต้องการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ~~ $V = (20-2x)(40-2x)x$
$= (800-60x+x^2)x$
$= x^3-60x^2+800x$

โดยมีเงื่อนไขคือ $x > 0$ และ $20-2x > 0$ ($40-2x > 0$ อัตโนมัติ)
$-2x > -20$
$x < \frac{-20}{-2} = 10$

∴ $0 < x < 10$

~~โดเมนของ V คือ $(0, 10)$ ซึ่งไม่ใช่ช่วงปิด~~

เราต้องการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $V = (20-2x)(40-2x)x$

$$= (800-120x+4x^2)x$$

$$= 4x^3-120x^2+800x$$

โดยมีเงื่อนไขคือ $x>0$, $20-2x>0$ $(40-2x>0)$
อัตโนมัติ

$$-2x>-20$$

$$x<\frac{-20}{-2}=10$$

$\therefore\ 0<x<10$

โดเมนของ V คือ $(0,10)$ ซึ่งไม่ใช่ช่วงปิด

หาค่าวิกฤต

$$V'(x) = 12x^2-240x+800$$

$$= 4(3x^2-60x+200)$$

$$V'(x)=0 \iff x = \frac{60\pm\sqrt{60^2-4\cdot3\cdot200}}{2\cdot3}$$

$$= \frac{60\pm\sqrt{3600-2400}}{6}$$

$$= \frac{60\pm\sqrt{1200}}{6}$$

$1200 = 10\times10\times2\times2\times3$

$$= \frac{60\pm20\sqrt3}{6}$$

$$= \frac{60+20\sqrt3}{6}, \frac{60-20\sqrt3}{6}$$

ไม่อยู่ในโดเมน

$\therefore$ $V'(x)$ มีจุดวิกฤตเพียงจุดเดียว คือ $x=\frac{60-20\sqrt3}{6}$

$v'(1) = +$ $\quad$ $v'(9) = 4(243 - 540 + 200)$

	0		$\frac{60-20\sqrt{3}}{6}$		10
$V'(x)$		$+$		$-$	
ลักษณะกราฟ		เพิ่ม		ลด	

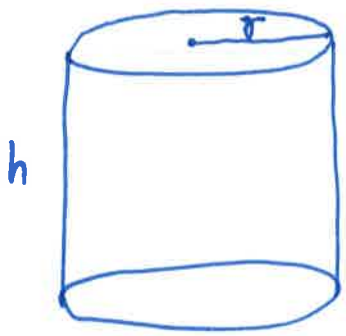
$\therefore$ V มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = \frac{60-20\sqrt{3}}{6}$

เนื่องจาก V มีจุดวิกฤตเพียงจุดเดียว
ค่าสูงสุดสัมพัทธ์จะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$\therefore$ ต้องตัดมุมให้เป็นรูป $\boxed{\text{จ}}$ ที่ด้านยาว $\frac{60-20\sqrt{3}}{6}$ ซม
จึงจะได้กล่องที่มีความจุดมากที่สุด

Ex โรงพยาบาลแห่งหนึ่งต้องการสร้างบ่อบำบัดน้ำเสียรูปทรงกระบอก ให้มีปริมาตร 125π ลบ.ม. จงหาความลึกและรัศมีของบ่อนี้ ที่จะทำให้สิ้นเปลืองวัสดุน้อยที่สุด

Sol



ให้ r แทนรัศมีของบ่อ (หน่วย ม.)
h แทนความสูงของบ่อ (หน่วย ม.)
A แทน พ.ท.ผิวของบ่อ

เราต้องการหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $A = \pi r^2 + 2\pi r h$
โดยมีเงื่อนไขคือ $r > 0, h > 0$

$$\pi r^2 h = 125\pi \Rightarrow h = \frac{125\pi}{\pi r^2} = \frac{125}{r^2}$$

เปลี่ยน A ให้เหลือตัวแปรเดียว

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{125}{r^2} = \pi r^2 + \frac{250\pi}{r}$$

โดเมนของ A คือ $(0,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่ช่วงปิด

หาจุดวิกฤต

$$A' = 2\pi r - 250\pi r^{-2} = 2\pi r - \frac{250\pi}{r^2}$$

$$= \frac{2\pi r^3 - 250\pi}{r^2}$$

$$= \frac{2\pi(r^3-125)}{r^2}$$

$A'(r)=0 \iff r=5$

$A'(r)$ หาค่าไม่ได้ $\iff r=0$ ซึ่งไม่อยู่ในโดเมน

		$A'(1) = -$		$A'(6) = +$
$A'(r)$	0	$-$	5	$+$
ลักษณะของ A		ลด		เพิ่ม

$\therefore$ A มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $r=5$

เมื่อ $r=5$, $h = \frac{125}{r^2} = \frac{125}{5^2} = 5$

$\therefore$ ควรสร้างบ่อให้ลึก 5 ม. และมีรัศมี 5 ม.
จึงจะสิ้นเปลืองวัสดุน้อยที่สุด $\square$