

3.7 อนุพันธ์ (Differential)

ให้สมการ $y = f(x)$

"เมื่อ x มีการเปลี่ยนแปลง
แล้ว y จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร"

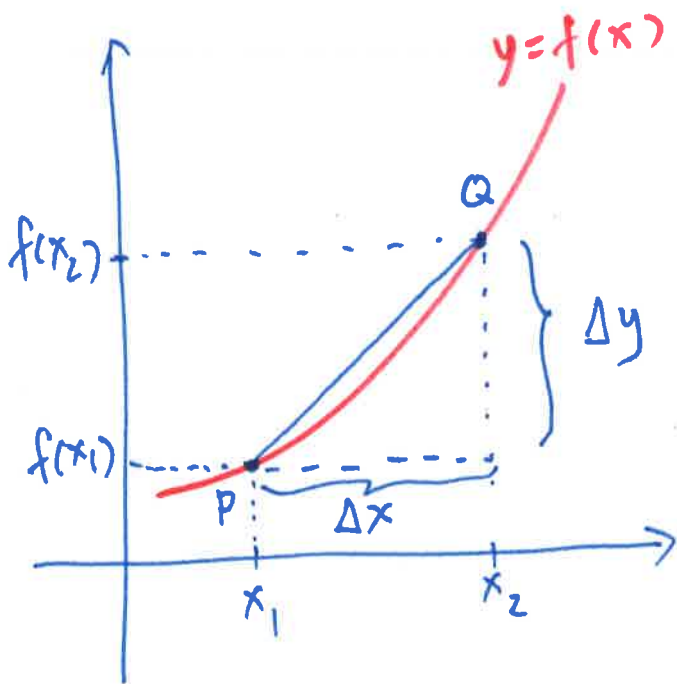
ให้ x เปลี่ยนจาก x_1 ไปเป็น x_2

แล้วหาขนาดของการเปลี่ยนแปลงนี้ด้วย Δx

นั่นคือ $\Delta x = x_2 - x_1$

และให้ Δy แทนปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ y
(ค่า y เปลี่ยนจาก $f(x_1)$ เป็น $f(x_2)$)

นั่นคือ $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$



หรือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{ความชันของ } \overline{PQ}$$

เมื่อความชันคงที่

ให้ $x_1 = x$

~~$x_2 = x$~~ $x_2 = x + \Delta x$

นั่นคือ

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

จากนิยามของอนุพันธ์

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

แทน $h = \Delta x$ ได้

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ถ้า Δx มีขนาดเล็กพอ เราสามารถประมาณ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ได้ด้วย $f'(x)$

นั่นคือ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

Ex จงใช้การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันในกรณีประมาณค่าของ $\sqrt{123}$

Sol สังเกตว่า $\sqrt{121} = 11$

$$\text{ให้ } f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ต้องการประมาณค่าของ $f(123)$

$$\text{ให้ } x = 121 \text{ และ } x + \Delta x = 123$$

$$\therefore \Delta x = 123 - 121 = 2$$

$$f(121) = \sqrt{121} = 11$$

$$f'(121) = \frac{1}{2\sqrt{121}} = \frac{1}{2 \cdot 2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{123} = f(123) &\approx f(121) + f'(121) \cdot 2 \\ &= 11 + \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 2 \\ &= 11 \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Ex ၁၀၇ ကို ဝေဖန်ပါ။ $\tan 42^\circ$

Sol $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$

၁၀၇ ကို ဝေဖန်ပါ။ $\tan 45^\circ = 1$

၁၀၇ ကို $f(x) = \tan x$

$\therefore f'(x) = \sec^2 x$

၁၀၇ ကို $x = 45^\circ$ နှင့် $x + \Delta x = 42^\circ$

$\therefore \Delta x = 42^\circ - 45^\circ = -3^\circ = -\frac{3\pi}{180} = -\frac{\pi}{60}$

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ = \pi \\ 1^\circ = \frac{\pi}{180} \\ 3^\circ = \frac{3\pi}{180} \end{array} \right\}$$

$f(45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

$f'(45^\circ) = \sec^2 45^\circ = \frac{1}{\cos^2 45^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{2} = 2$

$\tan 42^\circ = f(42^\circ) \approx f(45^\circ) + f'(45^\circ) \Delta x$

$= 1 + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{60}\right)$

$= 1 - \frac{\pi}{30}$

အဖြေပုံစံ 3.7

၁၀၇