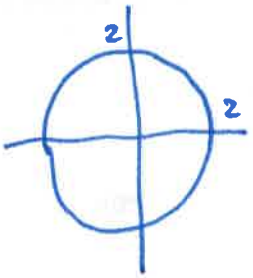
3.8 อัตราสัมพัทธ์ (Related Rates)

สมการของตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้น เช่น

สมการ $x^2+y^2=2^2$ —(*)



เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด x และพิกัด y ของจุดบนวงกลมรัศมี 2 หน่วย ในชีวิตประจำวันเรา ส่วนใหญ่จะมีเรื่องเวลามาเกี่ยวข้องด้วย ปัญหาที่เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่สัมพันธ์เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนของเวลา จะเรียกว่า

ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

เช่น ใน (*) เมื่อเราหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา (t) จะได้

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=\frac{d}{dt}2^2$$

$$\frac{dx^2}{dt}+\frac{dy^2}{dt}=0$$

$$\frac{dx^2}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dt}=0$$

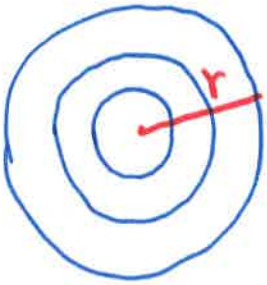
$$2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

ถ้าเรารู้ว่าที่จุด $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ มี $\frac{dx}{dt}=2$

เราจะคำนวณ $\frac{dy}{dt}=\frac{-2x}{2y}\frac{dx}{dt}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot 2=-2$

ณ ขณะหนึ่ง ถ้าเรารู้อัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทุกตัวยกเว้นตัวเดียว เราจะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่เหลือตัวเดียวได้

Ex เด็กชายคนหนึ่งโยนก้อนหินลงไปในสระน้ำนิ่ง ทำให้เกิดรอยกระเพื่อมของน้ำเป็นวงกลมที่ขยายตัวออกไป ถ้ารัศมีของวงกลมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.5 m/s อยากทราบว่าพื้นที่ของรอยกระเพื่อมนี้เพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใดเมื่อรัศมีของรอยกระเพื่อมเท่ากับ 20 m



Sol ให้ t แทนเวลาที่ผ่านไป (s) หลังจากก้อนหินกระทบน้ำ

r แทนรัศมีของรอยกระเพื่อม (m) หลังจาก t วินาที

A แทนพื้นที่ของรอยกระเพื่อม (m^2) หลังจาก t วินาที

ต้องการหา $\frac{dA}{dt}$ เมื่อ $r=20$

รู้ว่า $A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = \pi \frac{d}{dt} r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi \frac{dr^2}{dr} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dr}{dt} = 0.5$

$\therefore$ เมื่อ $r = 20$ จะได้ $\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot 20 \cdot 0.5$

$= 20\pi$

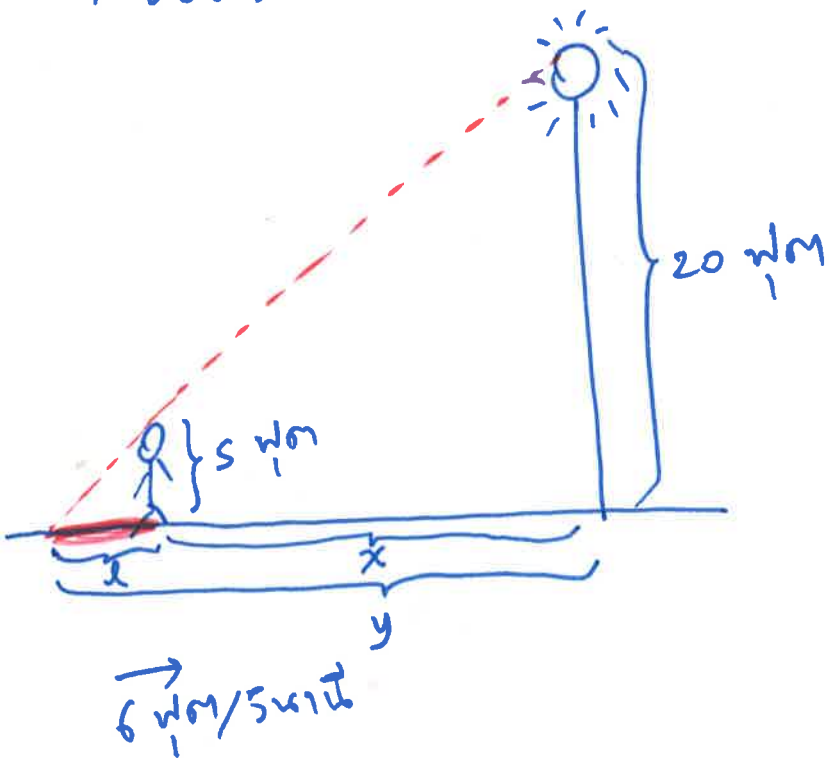
$\therefore$ พื้นที่ของรอยกรวยเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 20π ม^2/s

เมื่อรัศมีของรอยกรวยเพิ่มเท่ากับ 20 ม. □

Ex เด็กคนหนึ่งสูง 5 ฟุต เดินเข้าหาเสาไฟที่สูง 20 ฟุต ด้วยอัตราเร็ว 6 ฟุต/วินาที

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวของเงาศีรษะของเด็กคนนี้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด

(2) ความยาวของเงาของเด็กคนหนึ่งเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด



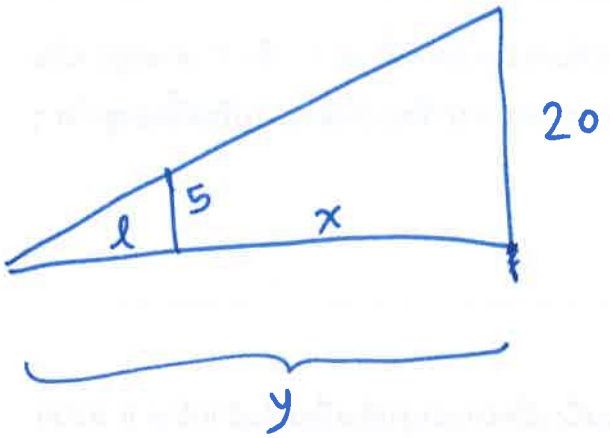
ให้ t แทนเวลา (s) หลังจากเด็กเริ่มเดิน

x แทนระยะห่างระหว่างเด็กกับโคนของเสาไฟหลังจาก t วินาที

y แทนระยะห่างระหว่างปลายเงาศีรษะของเด็กกับโคนของเสาไฟหลังจาก t วินาที

l แทนความยาวของเงาของเด็กหลังจาก t วินาที

(1) ต้องการ $\frac{dy}{dt}$



จาก Δ คล้าย จะได้

$$\frac{l}{y} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{y-x}{y} = \frac{1}{4}$$

$$4y - 4x = y$$

$$3y = 4x$$

$$\therefore 3\frac{dy}{dt} = 4\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dx}{dt}$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dx}{dt} = -6$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{4}{3}.(-6) = -8$$

$\therefore$ ปลายเงาศีรษะของเด็กคนนี้เคลื่อนที่เข้าหาเสาไฟด้วยอัตรา -8 ฟุตต่อวินาที

(2) ต้องการ $\frac{dl}{dt}$

จาก $l = y - x$ จะได้

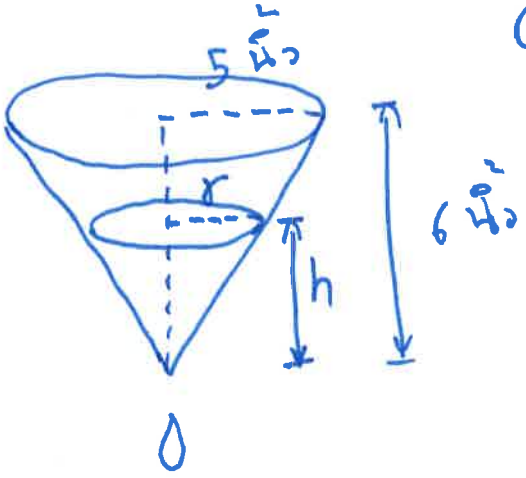
$$\frac{dl}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = -8 - (-6) = -2$$

$\therefore$ ความยาวของเงาของเด็กคนนี้ลดลงด้วยอัตราเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที

Ex ถ้วยกระดาษรูปกรวยกลมตรง ปากกรวยมีรัศมี 5 นิ้ว และกรวยสูง 6 นิ้ว ตอนเริ่มต้นมีน้ำอยู่เต็มกรวย แต่ปลายกรวยมีรูรั่วทำให้น้ำไหลออกด้วยอัตราเร็ว 3 ล.บ.นิ้ว/นาที จงหาว่าระดับน้ำเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเร็วเท่าใดขณะเมื่อน้ำสูง 2 นิ้ว

Sol



ให้ t แทนเวลา (s) หลังจากน้ำเริ่มรั่ว

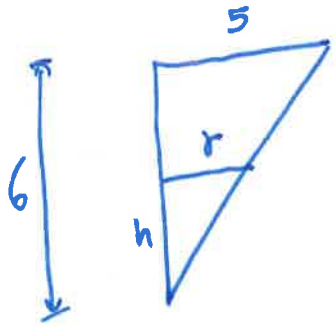
h แทนความสูงของน้ำ (นิ้ว) หลังจาก t นาที

r แทนรัศมีของผิวน้ำในกรวย (นิ้ว) หลังจาก t นาที

V แทนปริมาตรของน้ำในกรวย (ล.บ.นิ้ว) หลังจาก t นาที

โจทย์ต้องการหา $\frac{dh}{dt}$ เมื่อ $h=2$

รู้ว่า $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ และ $\frac{dV}{dt}=-3$



จาก Δ คล้าย จะได้

$$\frac{r}{h}=\frac{5}{6}$$

$$r=\frac{5}{6}h$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{6}h\right)^2 h$$

$$V=\frac{25\pi h^3}{108}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{25\pi}{108}\frac{dh^3}{dt}=\frac{25\pi}{108}\cdot\frac{dh^3}{dh}\frac{dh}{dt}$$

$$=\frac{25\pi}{108}\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{25\pi h^2}{36}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{36}{25\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

$\therefore$ เมื่อ $h = 2$ จะได้ $\frac{dh}{dt} = \frac{36}{25 \cdot \pi \cdot 4} \cdot (-3)$

$$= \frac{-27}{25\pi}$$

$\therefore$ ระดับน้ำลดลงด้วยอัตราเร็ว $\frac{27}{25\pi}$ นิ้วต่อวินาที ในขณะน้ำสูง 2 นิ้ว □