วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

คำนำ

คณิตศาสตร์เป็นรากฐานของวิทยาการต่างๆเกือบทั้งหมด โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์และสังคมศาสตร์ ทั้งนี้เพราะคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่สอนให้ผู้เรียนรู้จักวิธีคิดอย่างมีเหตุผล และเข้าใจในระบบที่จะนำทฤษฎีบทเข้าไปประยุกต์ใช้ได้อีกด้วย

สำหรับนักศึกษาภาควิชาคณิตศาสตร์ซึ่งจะต้องเรียนวิชาทางคณิตศาสตร์อยู่หลายรายวิชา ทั้งที่เป็นวิชาบังคับและวิชาเลือก จึงต้องเรียนรู้ความเป็นมาอย่างมีระบบ ตลอดจนสามารถอ่านบทนิยามและพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เป็นเนื้อหาหลักของแต่ละรายวิชาได้ นักศึกษาจึงจำเป็นต้องมีพื้นความรู้เรื่องตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ และเมื่อรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานซึ่งเป็นวิชาบังคับพื้นฐานของนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ไม่ได้ครอบคลุมเนื้อหาส่วนนี้ไว้ อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร จึงเล็งเห็นความสำคัญและความจำเป็นที่จะต้องเปิดสอนรายวิชา "วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์" ไว้ให้เป็นวิชาบังคับของนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 และเป็นวิชาเลือกสำหรับนักศึกษาวิชาเอกสถิติและวิทยาการคอมพิวเตอร์ (โดยเฉพาะในสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ปัจจุบันตรรกศาสตร์ได้เป็นรากฐานของการศึกษาที่เกี่ยวกับระบบฐานข้อมูล และยังช่วยในการออกแบบโปรแกรมต่างๆอีกด้วย)

หนังสือเล่มนี้จึงถูกเรียบเรียงขึ้นโดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักศึกษาใช้เป็นตำรา เพื่อเป็นแนวทางการศึกษาตรรกศาสตร์ ตลอดจนให้เห็นตัวอย่างของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

อนึ่งในการเรียนการสอน ผู้สอนอาจยกเนื้อหาใดของวิชาทางคณิตศาสตร์มาเป็นตัวอย่างให้เห็นลักษณะวิธีการพิสูจน์แบบต่างๆก็ได้ แต่สำหรับหนังสือเล่มนี้ได้รวบรวมไว้พอเป็นสังเขปเกี่ยวกับเนื้อหาที่นักศึกษาจะต้องพบและเกี่ยวข้องอยู่เสมอในหลายๆรายวิชา เพื่อให้นักศึกษาเกิดความคุ้นเคย เข้าใจถึงการอ่านบทนิยามและการพิสูจน์ต่างๆ นอกจากนี้วิธีการเรียนการสอนของวิชานี้ยังเน้นที่การฝึกหัดการพิสูจน์ และอ่านบทนิยามด้วยตนเอง ดังนั้นนอกจากจะมีชั่วโมงบรรยาย 3 คาบต่อสัปดาห์แล้วนักศึกษายังต้องมีชั่วโมงฝึกหัดอีกต่างหาก ตลอดจนต้องทำแบบฝึกหัดส่งอาจารย์ผู้สอนอยู่เสมอ หนังสือเล่มนี้จึงเน้นที่ให้มีแบบฝึกหัดจำนวนมากอีกด้วย

ในบทที่ 1 ผู้เขียนได้แสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับลักษณะโดยธรรมชาติของคณิตศาสตร์ ตลอดจนชี้ให้เห็นถึงการศึกษาในรูปที่เรียกว่า "ระบบสัจพจน์" สำหรับบทที่ 2 และบทที่ 3 เป็นเนื้อหาวิชาตรรกศาสตร์ และในบทที่ 4 ได้แสดงการนำตรรกศาสตร์ไปช่วยพิสูจน์ทฤษฎีบทในเนื้อหาของคณิตศาสตร์ ดังกล่าวแล้ว

ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพบูลย์ รัตนประเสริฐ และภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ที่ได้รับเป็นธุระในการจัดพิมพ์เอกสารเล่มนี้จนสำเร็จลุล่วงเป็นอย่างดี อย่างไรก็ตามเอกสารเล่มนี้ยังคงมีข้อบกพร่องอยู่บ้าง ทั้งในส่วนของเนื้อหา สัดส่วนของแบบฝึกหัด และการตรวจอักษร ผู้เขียนจึงขอน้อมรับความผิดเหล่านี้ไว้ และยินดีรับการเสนอแนะเพื่อการปรับปรุงครั้งต่อไป

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

กุมภาพันธ์ 2536

สารบัญ

คำนำ

บทที่ 1 : วิธีการของคณิตศาสตร์

1.1 คณิตศาสตร์คืออะไร 1

1.2 คณิตศาสตร์กับนามธรรม 2

1.3 คณิตศาสตร์กับสัญลักษณ์ 3

1.4 คณิตศาสตร์กับการให้เหตุผล 5

1.5 คณิตศาสตร์กับระบบสัจพจน์ 7

บทที่ 2 : ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

2.1 บทนำ 27

2.2 ประโยคคณิตศาสตร์ 27

2.3 การวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความ 36

2.4 หลักขั้นพื้นฐานของตรรกศาสตร์ 43

2.5 เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอ 43

2.6 ข้อความสมมูลและสัจนิรันดร์ 45

2.7 กฎการแทนที่ 48

2.8 ตรรกบทกับความสมเหตุสมผล 50

2.9 การอ้างอิง 57

2.10 การพิสูจน์ข้อโต้แย้ง 65

2.11 การพิสูจน์สัจนิรันดร์ 82

2.12 การพิสูจน์ว่าไม่จริง 85

บทที่ 3 : ตรรกศาสตร์ภาคแสดง

3.1 การเปลี่ยนภาษาเป็นสัญลักษณ์ 88

3.2 ประโยคเปิด 90

3.3 ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ 92

3.4 ตำแหน่งของตัวแปร 98

3.5 การพิสูจน์ตรรกบทที่มีตัวบ่งปริมาณ 102

3.6 การพิสูจน์ความไม่สมเหตุสมผล 119

3.7 สัจนิรันดร์ของการบ่งปริมาณ 123

3.8 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ 128

บทที่ 4 : ตัวอย่างวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

4.1 บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซต 132

4.2 บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับพีชคณิต 154

4.3 โครงสร้างพีชคณิต 178

4.4 บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับระบบจำนวน 189

4.5 การพิสูจน์ว่าลิมิตเป็นจริงและเป็นเท็จ 212

บรรณานุกรม 246

บัญชีศัพท์ 248

บทที่ 1

วิธีการของคณิตศาสตร์

1.1 คณิตศาสตร์คืออะไร

"คณิตศาสตร์" เป็นคำภาษาไทยที่เราตั้งขึ้นใช้แทนคำภาษาอังกฤษว่า "MATHEMATICS" ที่มีรากศัพท์จากภาษาลาตินว่า "MANTHENIAN" ซึ่งแปลว่า "ศึกษา" หรือ "เรียนรู้" เมื่อสมัยก่อนประวัติศาสตร์นั้นเราเชื่อกันว่าคณิตศาสตร์เป็นวิทยาศาสตร์ที่แท้จริง ทุกอย่างที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ถูกยอมรับว่าเป็นจริงโดยสัมบูรณ์ ไม่ขึ้นต่อข้อมูล การวัด การทดลอง และการพิสูจน์ใดๆ ดังคำกล่าวว่า "จริงยิ่งกว่า 2+2 เป็น 4" และสมัยนั้นคณิตศาสตร์ก็คือ *เรขาคณิตของยูคลิด (Euclidean Geometry)* ซึ่งทุกคนยอมรับว่า

"ระหว่างสองจุดใดๆจะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวลากผ่าน"

หรือ

"ถ้า a=b และ b=c แล้ว a=c"

หรือ

"เส้นตรงสองเส้นตัดกันจะเกิดมุมขึ้นสองคู่โดยที่ผลรวมของมุมประชิดแต่ละคู่เท่ากับสองมุมฉาก"

เป็นต้น แต่เมื่อประมาณกลางศตวรรษที่ 19 ได้มีนักคณิตศาสตร์ชาวฮังการีชื่อ โลบาเชฟสกี (Lobachevsky) และโบลไย (Bolyai) ประกาศความเป็นไปได้ของ*เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด* (Non-Euclidean Geometry) เช่นเขากล่าวว่า

"ระหว่างจุด 2 จุดสามารถลากเส้นตรงผ่านได้มากกว่า 1 เส้น"

เป็นต้น ทำให้นักคณิตศาสตร์สมัยนั้นเริ่มสับสนกับ "ความจริง" ของคณิตศาสตร์ เขาเริ่มต้องการการแสดงให้เห็นจริงในบางสิ่งซึ่งไม่อาจบอกได้ในทันที เช่น

"ผลบวกของมุมภายในของสามเหลี่ยมใดๆเท่ากับสองมุมฉาก"

หรือ

"ระหว่าง 2 จุดใดๆบนเส้นตรงไม่ว่า 2 จุดนั้นจะอยู่ใกล้กันเพียงใดก็ตามจะมีจุดระหว่าง 2 จุดนั้นเป็นจำนวนนับไม่ถ้วนเสมอ"

เป็นต้น และเมื่อยังไม่ทราบว่าจะพิสูจน์ข้อความเหล่านี้ได้อย่างไร วิธีการทางวิทยาศาสตร์ เช่น การทดลองหรือการวัดขนาด จึงเข้ามามีบทบาทเป็นเครื่องมือช่วยการพิสูจน์ แต่ต่อมาไม่นาน ความผิดพลาดที่เกิดจากการทดลองทำให้ข้อความที่ควรจะเป็นจริงอย่างสัมบูรณ์ เช่น "ถ้า a=b และ b=c แล้ว a=c" อาจไม่จริงได้ เพราะถ้าจะทำการพิสูจน์ด้วยการวัดขนาดของลวด 3 เส้น a, b และ c อาจปรากฏว่า ถ้าเอาลวด a และลวด b มาเทียบกันจะได้ยาวเท่ากัน และเมื่อเอาลวด b มาเทียบกับลวด c ก็ได้ยาวเท่ากันเช่นเดียวกัน แต่เมื่อเอาลวด a และลวด c มาเทียบกันอาจปรากฏว่า ลวด a ยาวกว่าลวด c เป็นต้น จึงทำให้นักคณิตศาสตร์เริ่มมองเห็นว่า "ความจริง" ของคณิตศาสตร์ไม่ใช่ความจริงที่สรุปได้จากการทดลองหรือประสบการณ์ แต่ก็ไม่ใช่ความจริงที่จะถูกยอมรับโดยไม่มีเงื่อนไขเช่นกัน จึงเกิดคำถามขึ้นว่าแล้วคณิตศาสตร์คืออะไร ธรรมชาติของคณิตศาสตร์เป็นอย่างไรและความจริงในคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับอะไรเป็นต้น คำตอบที่เราจะได้รับกันต่อมาก็คือคณิตศาสตร์เป็นพลังความคิดของมวลมนุษยชาติในอันที่จะทำให้ได้สิ่งที่ต้องการ

1.2 คณิตศาสตร์กับนามธรรม

ความคิดเชิงนามธรรม หรือการเฟ้นหาสาระ (Abstraction) ซึ่งเป็นคุณลักษณะเด่นที่ชี้ความแตกต่างระหว่างมนุษยชาติกับสัตว์ทั่วไปคือความสามารถในการสร้างจินตนาการเพื่อการสร้างสรรค์สิ่งดีงาม มนุษย์ทุกคนจะเกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดและเรียนรู้วิธีสร้างนามธรรมในความคิดมาแต่เยาว์วัย ตัวอย่างเช่น การกำหนดหรือสามารถบอกชื่อของสองสิ่งที่ไม่เหมือนกันให้ต่างกันเพื่อจะได้สื่อความหมายให้เข้าใจกัน แต่สำหรับของกลุ่มหนึ่งซึ่งมีคุณลักษณะหรือคุณสมบัติที่ทำให้เราเกิดจินตนาการร่วมกัน เราจะให้ "สัญลักษณ์" หรือ "ชื่อ" ของทุกสิ่งในกลุ่มนั้นด้วยชื่อเดียวกันเช่น โต๊ะ เก้าอี้ บ้าน รถยนต์ เป็นต้น และโดยธรรมชาติมนุษย์จะกำหนดความแตกต่างของสิ่งต่างๆในโลกด้วยคุณลักษณะที่จะทำให้เกิดจินตนาการดังกล่าวเสมอ

การเฟ้นหาสาระของมวลมนุษย์ทำให้เกิดการพิจารณา จดจำ ศึกษา และวางข้อสรุป หรือบอกลักษณะร่วมของสิ่งจำพวกเดียวกัน เช่นเมื่อเราเห็นสุนัขตัวหนึ่ง ถ้าเราพิจารณาถึงแต่ความน่ารักของสุนัขตัวนั้น เราจะไม่เกิดจินตนาการอย่างใดเกี่ยวกับ "สุนัข" แต่ถ้าเรานึกถึง "ความเป็นสุนัข" ของสุนัขตัวนั้น เราจะมีจินตนาการไปยังสุนัขตัวอื่นๆและทุกตัวในโลก และทำให้ได้ข้อสรุปต่างๆ ตัวอย่างเช่น "สุนัขเลี้ยงลูกด้วยนม" "สิ่งที่เลี้ยงลูกด้วยนมเป็นสัตว์" และ "สัตว์

เป็นสิ่งมีชีวิต" เป็นต้น ซึ่งจะเห็นว่าในจินตนาการนี้ทำให้ได้ข้อสรุปของสิ่งอื่นๆตามมาด้วย เช่น "สัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม" และ "สิ่งมีชีวิต" เป็นต้น ซึ่งแสดงว่าลักษณะความคิดเชิงนามธรรม เป็นพลังความคิดเชิงสร้างสรรค์ไม่เพียงแต่ทำให้ได้ข้อสรุปที่เกี่ยวกับสิ่งที่กำลังสนใจอยู่ แต่ยังทำให้เกิดความสนใจในสิ่งใหม่เพิ่มขึ้นอีกด้วย อันเป็นลักษณะของการเจริญเติบโตของแขนงวิชาการต่างๆนั่นเอง

ลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์ก็เช่นกันมนุษย์เราจะสร้างคณิตศาสตร์ขึ้นในความคิด ด้วยการรับรู้สิ่งต่างๆที่เกิดขึ้นในโลกแล้วแยกแยะว่าอะไรเป็นอะไร ซึ่งในขบวนการนี้จะเกิดการเฟ้นหาสาระสู่สิ่งอื่นๆด้วย ต่อจากนั้นการเฟ้นหาสาระร่วมกับพลังแห่งการสร้างจินตนาการ จะดึงเอาคุณสมบัติร่วมของสิ่งต่างๆที่กำลังพิจารณาอยู่ทั้งหมดในเอกภพ(universe) แล้วบอกเล่าคุณสมบัติร่วมเหล่านั้นในรูปของ *"คำอนิยาม"(undefined term)* หรือ *"คำนิยาม"(defined term)* แล้วศึกษาสิ่งที่ให้นิยามไว้นั้นต่อไป โดยไม่มีภาพของ "สิ่ง" ที่สนใจในโลกของความเป็นจริงอีกต่อไป จึงเห็นได้ว่าคณิตศาสตร์มีโลกเฉพาะของวิชาที่อาจไม่เกี่ยวข้องอย่างใดเลยกับโลกของเรานี้ ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงมักกำหนดหรือให้นิยามสิ่งต่างๆในรูปสัญลักษณ์ จึงกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์เป็นแขนงวิชาที่ว่าด้วยการใช้สัญลักษณ์ ยิ่งไปกว่านั้นการไม่กำหนดความหมายเฉพาะกับสิ่งใดในโลกที่มีอยู่จริงทำให้มนุษย์สามารถนำจินตนาการเหล่านี้ไปประยุกต์กับระบบงานของตนๆที่มีสภาวะแวดล้อมที่สอดคล้องกับจินตนาการเหล่านั้น ตัวอย่างเช่นระบบฐานข้อมูลของคอมพิวเตอร์เป็นการประยุกต์พีชคณิตของบูล(Boolean Algebra) เป็นต้น

1.3 คณิตศาสตร์กับสัญลักษณ์

มนุษย์มีพลังความคิดในทางสร้างสรรค์โดยเฉพาะเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์เพื่อสื่อความหมายและจดจำเรื่องราว ดังจะเห็นว่ามนุษย์ในสมัยดึกดำบรรพ์จะบอกเล่าเรื่องราว หรือจดจำปรากฏการณ์ทางธรรมชาติต่างๆด้วยการขีดเขียนแผนภาพหรือสัญลักษณ์ต่างๆไว้ตามผนังถ้ำ และต่อมาสัญลักษณ์หรือรูปภาพเหล่านั้นก็ได้มีพัฒนาการจนกระทั่งเป็นภาษาเขียนต่างๆของพวกเราในปัจจุบัน พวกเราทุกคนเมื่อยังเป็นเด็กจะอยู่ในสิ่งแวดล้อมที่ทำให้ต้องเรียนรู้ภาษาพูดและภาษาเขียนทำให้คุ้นเคยและมีความชำนาญกับการใช้สัญลักษณ์ของภาษาเขียนจนกระทั่งบางครั้งเราจะรู้สึกไปว่าสัญลักษณ์เหล่านี้เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติหรือมีอยู่จริงในโลกนี้ เช่นเมื่อเขียน "5" เราจะรู้สึกทันทีว่าสัญลักษณ์นี้คือ "จำนวนห้า" แต่จริงๆแล้ว

เราไม่เคยเห็น "จำนวนห้า" เลยเพราะไม่มีตัวตน เป็นแต่เพียงจินตนาการเท่านั้น และนี่คือความสำเร็จอันยิ่งใหญ่ของมวลมนุษยชาติที่สามารถดึงขบวนการของนามธรรม หรือจินตนาการในความคิดออกมาเป็นรูปธรรมให้เห็นเสมือนหนึ่งว่ามีอยู่ในโลกจริงๆ

คณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาเกี่ยวกับความเป็นนามธรรมหรือพัฒนาการพลังความคิดเชิงสร้างสรรค์ของมวลมนุษยชาติก็ได้นำวิธีการใช้สัญลักษณ์ มาเป็นหัวใจของการศึกษาเรื่องราว ดังจะเห็นว่าสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อยู่รอบตัวเราเสมอ เช่น

1. คณิตศาสตร์ใช้สัญลักษณ์ในการบอกลักษณะของสิ่ง ในรูปของการบอก ขนาด อันดับหรือจำนวน ตัวอย่างเช่น ในการบอกลักษณะชายคนหนึ่งที่สูงและอายุอยู่ในวัยกลางคน เราจะกล่าวว่า

"ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุตและอายุประมาณ 40 ปี"

หรือเพื่อให้มีจินตนาการเกี่ยวกับขนาดของห้อง เรามักจะกล่าวว่า

"ห้องหนึ่งขนาดจุคนได้ 35 คน"

เป็นต้น

2. คณิตศาสตร์ใช้สัญลักษณ์เพื่อบอก ความสัมพันธ์ ความเปลี่ยนแปลง หรือปฏิกริยา เช่นเมื่อจะบอกว่าถังใบหนึ่งใหญ่กว่าอีกใบหนึ่ง หรือจะบอกว่า รถคันหนึ่งวิ่งเร็ว เราจะกล่าวว่า

"ถังใบที่หนึ่งจุน้ำเป็นสามเท่าของอีกใบหนึ่ง" ($V = 3v$)

หรือ

"รถยนต์คันนี้วิ่งด้วยความเร็ว 30 ไมล์ต่อชั่วโมง" (30 ไมล์ / ชม.)

เป็นต้น

3. คณิตศาสตร์ใช้สัญลักษณ์เพื่อแทนสิ่งเดียวกัน ซึ่งอยู่ในรูปสัญลักษณ์ที่ยุ่งยากกว่า ให้ดูง่ายขึ้น และรัดกุมยิ่งขึ้น เช่นเราจะแทนนิพจน์

$5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5$ ด้วยสัญลักษณ์ 5^{10}

หรือแทนนิพจน์

$1+2+3+4+5+6+7+8+9$ ด้วยสัญลักษณ์ 45

เป็นต้น

4. คณิตศาสตร์ใช้สัญลักษณ์แทนกลุ่มของสิ่งเพื่อแสดงความหมายเชิงทั่วไป หรือแสดงคุณสมบัติ เช่น

$$a + b = b + a$$

เราใช้สัญลักษณ์ a และ b แทนจำนวนใดๆก็ได้เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเกี่ยวกับคุณสมบัติการสลับที่ของการบวก หรือ

$$x + 2 = 5$$

เราใช้สัญลักษณ์ x แทนสิ่งหรือจำนวนที่เป็นคำตอบของสมการ ซึ่งในที่นี้มีอยู่เพียงจำนวนเดียว คือ 3

แม้ว่าทุกคนจะให้ความรู้สึกว่าคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่ยากจะเรียนรู้และให้เข้าใจเป็นอย่างดี ทั้งนี้เพราะเราคิดไปว่าไม่มีสิ่งใดที่จะเข้าใจยากยิ่งกว่าการเข้าใจวิธีใช้สัญลักษณ์ ซึ่งจะต้องทำความคุ้นเคยกับสัญลักษณ์ที่จะต้องใช้อยู่เสมอ

ความเป็นจริงแล้วการใช้สัญลักษณ์ไม่ใช่วิธีการยุ่งยากในตัวของมันเอง แต่กลับเป็นวิธีแนะนำการแก้ปัญหาที่ยุ่งยากในรูปง่ายที่สุด ดังนั้นการใช้สัญลักษณ์จึงเปรียบเสมือนเครื่องมือที่จะทำให้ได้คำตอบในทุกสิ่ง

1.4 คณิตศาสตร์กับการให้เหตุผล

ไม่ว่าสาขาวิชาใดก็ตาม จะมีกฎพื้นฐานหรือสมมติฐานของวิชานั้นๆ ตัวอย่างเช่น ข้อสรุป หรือทฤษฎีบททางวิทยาศาสตร์จะเป็นไปตามสมมติฐาน หรือสภาพแวดล้อมที่กำหนดไว้ หรือแม้แต่นักสถาปนิกที่มีความเป็นอิสระอย่างมากกับการออกแบบลักษณะและรูปร่างของอาคารต่างๆที่จะสร้างขึ้น แต่การออกแบบของอาคารเหล่านั้นก็ยังต้องคำนึงถึงการก่อสร้างที่จะต้องอยู่ภายใต้กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์ เช่นต้องให้สอดคล้องกับลักษณะการวางเสาเอกที่จะรับน้ำหนักของตัวอาคารได้เป็นต้น คณิตศาสตร์ก็เช่นกันแม้ว่าจะมีความเป็นอิสระในการกำหนดสัญลักษณ์เพื่อสื่อความหมาย หรือแม้จะมีโลกเฉพาะของวิชาดังกล่าวแล้วก็ตาม แต่เมื่อกำหนดถึงสิ่งใด แล้วสิ่งที่จะกล่าวตามมาก็ควรเป็นไปตามกฎเกณฑ์ใดกฎเกณฑ์หนึ่งเช่นเดียวกัน

ในทางวิทยาศาสตร์เราเชื่อว่า อากาศมีความกดดัน น้ำตาลละลายในน้ำได้ดีกว่าเกลือ หรือเสียงเดินทางในอากาศด้วยความเร็วประมาณ 1,100 ฟุตต่อวินาที เป็นต้น เพราะข้อสรุปเหล่านี้ปรากฏขึ้นในการทดลอง หรือเป็นประสบการณ์ที่ได้พบครั้งแล้วครั้งเล่า ทำให้เกิด "ความเชื่อ" ว่าในสภาพการณ์อย่างเดียวกัน หรือภายใต้สมมติฐานเดียวกัน สิ่งที่พบมาหรือผลของ

การทดลองจากครั้งก่อนจะเกิดขึ้นอีก แต่ความเชื่อในความจริงที่ได้ลักษณะนี้เป็น "ความเชื่อ" หรือ "ความจริง" ที่คาดว่า "อาจจะ" เกิดขึ้นเท่านั้น เพราะจะไม่มีใครบอกได้เลยว่าหลังจากทดลองมาแล้ว 10 ครั้ง หรือ 20 ครั้ง หรือ 100 ครั้ง ที่ได้ผลเหมือนๆกัน แล้วครั้งที่ 101 จะได้ผลเช่นเดียวกันอีกหรือไม่ ดังที่ไอน์สไตน์เคยกล่าวว่า

"ไม่ว่าจะกี่ครั้งของการทดลองก็ตามจะไม่สามารถพิสูจน์คำพูดของฉันได้เลย แต่การทดลองเพียงครั้งเดียวอาจทำให้ทฤษฎีของฉันผิดหมด"

ลักษณะการสรุปผลทางวิทยาศาสตร์ที่กล่าวมาเป็นการสรุปว่าผลเป็นจริงในกรณีทั่วไปจากกรณีเฉพาะจึงนิยมเรียกกันว่า *"การสรุปจากประสบการณ์"(Induction)* โดยใช้การให้เหตุผลที่เรียกว่า *เหตุผลแบบอุปนัย(Inductive Reasoning)*

แต่ยังมีลักษณะการสรุปอีกวิธีหนึ่งคือการสรุปด้วยพลังความสามารถของจินตนาการภายใต้สามัญสำนึกและการเฟ้นหาสาระ และเพื่อจะให้เข้าใจลักษณะของการสรุปเช่นนี้ จะลองมาพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ชาวอำเภอสามพรานอาศัยอยู่ในจังหวัดนครปฐม

(2) นายแดงเป็นชาวอำเภอสามพราน

จากประโยคทั้งสองทำให้เราทราบทันทีว่า

(3) นายแดงอาศัยอยู่ในจังหวัดนครปฐม

หรือจากประโยคที่กล่าวว่า "ฉันถูกหรือผิด" นั้นโดยสามัญสำนึกจะต้องกล่าวว่า "ฉันไม่ผิด" และนั่นคือสรุปว่า "ฉันถูก" เป็นต้น จะเห็นว่าการยอมรับประโยคใหม่ หรือการสรุปได้ประโยคใหม่นี้จะต้องมีกลุ่มของประโยคที่มาก่อนหรือเกิดขึ้นก่อน และหากว่าเราพูดเกี่ยวกับความจริงของประโยคเหล่านี้ก็จะสังเกตได้ว่าการสรุปว่าประโยคใหม่เป็นจริงนี้เป็นการยอมรับว่า "จริง" โดยไม่มี "อาจจะจริง" ดังเช่นการสรุปจากประสบการณ์ เราจึงเรียกหลัก "การสรุป" หรือ "การยอมรับว่าจริง" ของประโยคใหม่โดยอาศัยความเชื่อมั่นในความไม่ขัดแย้งกันเองของสามัญสำนึกเช่นนี้ว่า *"การสรุปจากหลักเกณฑ์"* หรือ *"การสรุปจากเหตุผล"* หรือ *"การให้เหตุผลแบบนิรนัย" (deduction)* และขอให้สังเกตว่าการสรุปจากหลักเกณฑ์อยู่บนพื้นฐานของการยอมรับสมมติฐานเสมอ จึงต่างจากความจริงที่สัมบูรณ์ หรือที่เป็นจริงอยู่แล้วโดยตัวของมันเอง

ในทางคณิตศาสตร์เราไม่ต้องการกฎเกณฑ์ที่กำหนดความจริงจากประสบการณ์ และ/หรือความจริงอย่างสัมบูรณ์ ข้อความที่กล่าวในทางคณิตศาสตร์จึงถูกกำหนดความจริงที่แน่นอนอย่าง

ใดอย่างหนึ่งโดยไม่เปลี่ยนแปลงตามสภาวะการณ์ใดๆ นั่นคือต้องลืมความเป็นจริงในชีวิตประจำวัน หรือไม่นำเอาความจริงโดยทั่วไปเข้าร่วมกับความจริงในคณิตศาสตร์ แต่จะพิจารณาเฉพาะความจริงที่สัมพันธ์กับความจริงที่ได้ยอมรับกันมาก่อนแล้ว จึงเห็นได้ว่ากฎเกณฑ์ของคณิตศาสตร์มีพื้นฐานเป็นการสรุปจากหลักเกณฑ์ หรือที่เราจะศึกษากันต่อในบทต่อไปในชื่อของ *กฎของตรรกศาสตร์ (Law of Logic)*

1.5 คณิตศาสตร์กับระบบสัจพจน์

จากที่กล่าวแล้วว่าเราไม่ยอมรับความจริงในคณิตศาสตร์ว่าเป็นความจริงอย่างสัมบูรณ์ หรือความจริงที่ได้จากการทดลอง เพราะอาจทำให้เกิดข้อความขัดแย้งกันเองทำให้สับสน เช่น เรขาคณิตของยูคลิดยอมรับความจริงของข้อความ "ระหว่างจุดสองจุดมีเส้นตรงลากผ่านได้เพียงเส้นเดียว" ในขณะที่เรขาคณิตของโบลไยยอมรับความจริงว่า "ระหว่างจุดสองจุดมีเส้นตรงลากผ่านได้มากกว่าหนึ่งเส้น" เป็นต้น การยอมรับความจริงภายใต้สมมติฐานหรือนั่นคือการสรุปจากหลักเกณฑ์จึงถูกนำมาช่วยในการพิสูจน์ความจริงของคณิตศาสตร์

การสรุปจากหลักเกณฑ์เปรียบเสมือนการเล่นเกมส์ เพราะเกมส์ต้องอยู่ภายใต้กฎกติกาที่กำหนดขึ้นและยอมรับกัน และเพื่อให้เห็นแนวความคิดนี้ จะขอยกตัวอย่างเกมส์ที่มีชื่อว่า tick-tack-toe ขึ้นเปรียบเทียบ

เกมส์ tick-tack-toe ประกอบด้วยผู้เล่น 2 คนที่แต่ละจะต้องทำ "*เครื่องหมาย*" ต่างกัน "X" หรือ "O" ลงใน "*ช่องว่าง*" 9 ช่อง แล้วผู้ชนะคือผู้ที่ทำเครื่องหมายครบ 3 เครื่องหมายเป็นเส้นตรงในแนวทะแยง แนวตั้ง หรือแนวนอน ก่อนผู้เล่นอีกคนหนึ่ง

สังเกตว่าการอธิบายกติกาของเกมส์เริ่มต้นด้วยคำว่า "เครื่องหมาย X หรือ O ที่ต่างกัน" และ "ช่องว่าง" กับข้อความ "มีช่องว่าง 9 ช่องซึ่งแต่ละช่องจะไม่ทำเครื่องหมายซ้ำกัน" โดยละไว้ว่าทุกคนเข้าใจตรงกัน แต่เมื่อกล่าวถึง "ผู้ชนะ" "เครื่องหมายครบ 3 เครื่องหมาย" หรือ "เล่นสลับกัน" จะต้องอธิบายความหมายให้ชัดเจนเพื่อไม่ให้เกิดการถกเถียงกันภายหลังเมื่อเกมส์เริ่มต้นแล้ว เราจึงอาจอธิบายกติกาของเกมส์นี้อย่างมีระบบโดยให้ A_i แทนข้อความที่ละไว้ว่าเข้าใจตรงกัน และ D_i เป็นข้อความที่อธิบายคำที่อาจทำให้เกิดการสับสนในภายหลัง โดยที่ i เป็นลำดับของการเกิดขึ้นของข้อความดังกล่าว ดังต่อไปนี้

คำที่เข้าใจความหมายตรงกัน : "เครื่องหมาย X หรือ O"

"ช่องว่าง"

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A_1 : มีช่องว่าง 9 ช่อง

D_1 : ให้ชื่อช่องว่างทั้ง 9 ด้วยสัญลักษณ์ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

D_2 : "*ช่องมุม*" หมายถึงช่องที่มีเครื่องหมาย 1, 3, 7 หรือ 9

D_3 : "*ช่องกลาง*" หมายถึงช่องที่มีเครื่องหมาย 5

D_4 : "*ช่องข้าง*" หมายถึงช่องที่มีเครื่องหมาย 2, 4, 6 หรือ 8

A_2 : ไม่มีช่องว่างใดถูกทำเครื่องหมาย 2 ครั้ง

D_5 : "*เล่น*" คือการทำเครื่องหมายลงในช่องว่าง

D_6 : "*เล่นสลับกัน*" หมายถึง "X" (หรือ "O") เล่นแล้ว "O" (หรือ "X") เล่น

D_7 : "*เปิดเกมส์*" หมายถึงเล่นเมื่อยังไม่มีเครื่องหมายในช่องว่างใดทั้ง 9 ช่องว่าง

D_8 : "*X ชนะ*" (หรือ "*O ชนะ*") หมายถึงเครื่องหมาย X (หรือ O) อยู่ในช่องว่างทั้งสามช่องอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9), (1, 5, 9), (3, 5, 7)

D_9 : "เสมอ" หมายถึงไม่มีผู้ชนะ

แม้เมื่อเกมส์ยังไม่เริ่มต้น เหตุการณ์หรือข้อความใดๆที่จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอนระหว่างการเล่นทุกครั้ง จะเป็นเหตุการณ์หรือข้อความที่พิสูจน์หรือแสดงได้จากกลุ่มของข้อความ A_i และ D_i ทั้งหมดข้างต้น ดังตัวอย่างข้อความต่อไปนี้

T_1 : มีการเปิดเกมส์ได้ 9 แบบ

T_2 : ถ้า "X" เปิดเกมส์แล้ว "X" จะเล่น 5 ครั้งในเกมส์นั้น

T_3 : ถ้า "X" เปิดเกมส์ แล้วการเล่นเป็นไปได้ 126 แบบ

T_4 : ถ้า "X" เปิดเกมส์ แล้ว "X" มีโอกาสชนะ 120 ใน 126 ครั้ง

T_5 : ถ้า "X" เปิดเกมส์ แล้ว "O" จะเป็นผู้เล่นสุดท้ายในทุกการเล่นที่เสมอกัน

เป็นต้น

จากจุดเริ่มต้นด้วยกลุ่มคำ (คำอนิยาม) หรือข้อความ (สัจพจน์) ที่ถูกยอมรับว่าเป็นจริงหรือเข้าใจตรงกัน แล้วสรุปได้ข้อความใหม่ภายใต้กฎเกณฑ์ที่แน่นอน ดังเช่นเกมส์ข้างต้นอาจถูกมองได้ในรูปของระบบและในทางคณิตศาสตร์เรียกระบบที่เกิดขึ้นในลักษณะเช่นนี้ว่า *ระบบสัจพจน์ (Axiomatic System)*

ระบบสัจพจน์ คือระบบในคณิตศาสตร์ที่ต้องประกอบด้วย

1. **คำอนิยาม (Undefined Terms)** เพียงไม่กี่คำ

กลุ่มคำที่จะไม่ให้ความหมายและมีความหมายในใจตรงกันนี้ แม้แต่ในชีวิตประจำวันเราก็ต้องใช้กัน เช่น พ่อ แม่ สีขาว เป็นต้น เพราะถ้าเราต้องนิยามคำทุกๆคำที่จะใช้กันจะก่อให้เกิดการใช้คำที่ยังไม่ทราบความหมายไปนิยามคำอีกคำหนึ่ง และเมื่อเป็นดังนี้การนิยามแบบวนเวียนเป็นวงกลมจะเกิดขึ้น ตัวอย่างเช่น ถ้าเราไม่ถือว่า "สีขาว" เป็นคำอนิยาม เราก็ต้องนิยามดังเช่น "สีขาวคือสีของสำลีหรือหิมะ" ก็จะทำให้เกิดคำว่า "หิมะ" และ "สำลี" ที่ต้องการการนิยามต่อไป และในที่สุดเมื่อจะต้องอธิบายเรื่อง "สี" ของสองสิ่งนี้เราจะต้องวกกลับมาใช้คำว่า "สีขาว" อีกเป็นต้น จึงทำให้ไม่ทราบความหมายของคำใดเลย

คำสามัญพื้นฐานที่ไม่สามารถอธิบายด้วยคำอื่นอย่างรัดกุมและเราก็คุ้นเคยกันมาจนเป็นที่เข้าใจตรงกันแล้ว ในทางคณิตศาสตร์เรียกว่า *คำอนิยาม*

2. **คำนิยาม (Defined Terms)** เป็นคำที่ถูกแนะนำขึ้นในรูปของคำอนิยาม และ/หรือคำนิยามที่มีมาก่อนด้วยข้อความสั้นๆแต่รัดกุมซึ่งจะเรียกว่า *บทนิยาม (definitions)* และบทนิยามที่ดีควรมีลักษณะดังนี้

ก. บทนิยามควรเขียนด้วยถ้อยคำสั้นๆอย่างรัดกุมในรูปของคำอนิยาม และ/หรือคำนิยามที่มีมาก่อนเท่านั้น

เช่นในวิชาเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้ จุด และเส้นตรง เป็นคำอนิยาม แล้วเราสามารถนิยามคำอื่นๆที่ตามมาได้ ตัวอย่างเช่น

"*สามเหลี่ยม* คือรูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 3 เส้นซึ่งพบกันที่จุด 3 จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน"

หรือ "*ด้านของสามเหลี่ยม* คือส่วนของเส้นตรงที่ประกอบกันขึ้นเป็นสามเหลี่ยม"

หรือ "*สามเหลี่ยมหน้าจั่ว* คือสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านเท่ากัน"

เป็นต้น

ข. บทนิยามต้องให้ความหมายกับคำนิยาม เพียงความหมายเดียวซึ่งกล่าวถึงคุณลักษณะที่เด่นชัดของคำที่จะนิยาม ตัวอย่างเช่น

"*สี่เหลี่ยมมุมฉาก* คือสี่เหลี่ยมที่มีมุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก"

หรือ "*สี่เหลี่ยมด้านขนาน* คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน"

เป็นต้น

ค. บทนิยามต้องย้อนกลับไปมาได้ นั่นคือถ้านิยาม A ว่าคือ B แล้วสิ่งใดที่เป็น B จะต้องเป็น A ด้วย เช่น

"สี่เหลี่ยมคางหมูคือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า"

เป็นข้อความที่ย้อนกลับไม่ได้ เพราะสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าบางรูปไม่เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู แต่

"*สี่เหลี่ยมคางหมู* คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่"

เป็นข้อความที่ย้อนกลับไปมาได้ เป็นต้น

ง. บทนิยามต้องไม่ประกอบด้วยข้อความแย้งกันเอง เช่น ถ้านิยาม

"สี่เหลี่ยมด้านขนานคือสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกัน"

แล้วจะมีข้อความแย้งได้ว่า สี่เหลี่ยมคางหมูก็คือสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้วยเป็นต้น ดังนั้นจึงไม่ควรนิยามสี่เหลี่ยมด้านขนานเช่นนี้ แต่

"*สี่เหลี่ยมด้านขนาน* คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน"

หรือ

"*สามเหลี่ยมด้านเท่า* คือสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาวเท่ากัน"

จะเป็นข้อความที่ไม่มีข้อโต้แย้งได้ เป็นต้น

จ. บทนิยามเมื่อถูกกำหนดขึ้นในระบบแล้ว ต้องบอกได้ว่ามีสิ่งใดเป็นหรือไม่เป็นตามบทนิยาม

3. สัจพจน์ (Axioms หรือ Postulates) คือข้อความที่ยอมรับ หรือกำหนดให้เป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ หรือเป็นข้อความที่เป็นจริงอย่างสัมบูรณ์

โดยทั่วไปแล้วข้อความที่จะเป็นสัจพจน์มักเป็นข้อความที่ยอมรับกันโดยทั่วไปตามสามัญสำนึก หรือ*การคาดคะเน (assumptions)* หรือเป็น*ข้อความที่เป็นจริง* โดยตัวของมันเองหรือ*สิ่งที่เห็นจริงแล้ว(axioms)* ซึ่งเป็นที่ยอมรับกันมาโดยไม่เกิดข้อขัดแย้ง หรือเป็น*ข้อตกลง* หรือ*กติกา(postulates)* เพื่อสร้างระบบขึ้น ดังนั้นการกำหนดสัจพจน์จึงควรมีหลักเกณฑ์ที่จะทำให้ระบบสัจพจน์เป็นที่น่าเชื่อถือ หรือเป็นระบบสัจพจน์ที่ดีที่จะสามารถแก้ปัญหาความขัดแย้งได้ สัจพจน์ที่จะกำหนดให้กับระบบจึงควรมีลักษณะดังนี้

ก. ทุกสัจพจน์มี*ความสอดคล้องกัน(consistency)* กล่าวคือ แต่ละสัจพจน์จะต้องมีความไม่ขัดแย้งกับสัจพจน์อื่นๆ

ข. ทุกสัจพจน์อยู่ด้วยกันด้วย*ความบริบูรณ์ (complete)* กล่าวคือ ถ้าสัจพจน์ใดขัดแย้งหรือทำให้เกิดข้อความขัดแย้งในระบบต้องสามารถพิสูจน์ได้ว่าสัจพจน์นั้นเป็นเท็จ

ค. ทุกสัจพจน์มีลักษณะเป็น*อิสระต่อกัน (independence)* กล่าวคือ แต่ละสัจพจน์ต้องไม่เป็นข้อความที่สามารถพิสูจน์ได้ หรือเป็นผลมาจากสัจพจน์อื่นหรือข้อความอื่นๆของระบบ

4. ทฤษฎีบท (Theorems) คือข้อความซึ่งพิสูจน์ได้ด้วยสัจพจน์ และ/หรือ ทฤษฎีบทที่มาก่อนภายใต้กฎเกณฑ์ของตรรกศาสตร์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทบางทฤษฎีบทประกอบด้วยการพิสูจน์ความจริงที่ไม่เคยพิสูจน์หรือเป็นทฤษฎีบทมาก่อนอยู่หลายขั้นตอน ทำให้การพิสูจน์ยาวและซับซ้อนต่อการทำความเข้าใจ เราจึงอาจนำขั้นตอนต่างๆเหล่านั้นมาสรุปเป็นความจริงเพื่อนำไปอ้างอิงการพิสูจน์ทฤษฎีบท ความจริงแต่ละขั้นตอนที่เราแยกออกมานี้ นิยมเรียกกันว่า *ทฤษฎีบทประกอบ (Lemma)* และหลังจากการพิสูจน์ทฤษฎีบทแล้วถ้าเราพบว่ามีความจริงบางประการที่เป็นผลพลอยได้ หรือเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทเราก็อาจนำมาเขียนและพิสูจน์ต่อได้ซึ่งเรานิยมเรียกความจริงเหล่านี้

ว่า *บทแทรก (Corrollary)*

ข้อความบางข้อความเราคาดคะเนว่าน่าจะเป็นจริงตามประสบการณ์ที่ผ่านมา แต่ยังไม่มีการพิสูจน์ด้วยหลักเกณฑ์ของตรรกศาสตร์และก็ยังไม่เคยปรากฏความขัดแย้งกับข้อความนี้ เรานิยมเรียกข้อความลักษณะนี้ว่า *ข้อความคาดคะเน (Conjectures)* ข้อความเหล่านี้จะมีผู้พยายามพิสูจน์จนกลายเป็นทฤษฎีบท หรือหาตัวอย่างมาหักล้าง

เนื่องจากระบบสัจพจน์เป็นระบบที่กำหนดขึ้นอย่างมีหลักเกณฑ์ ระบบสัจพจน์จึงถูกนำมาเป็นเครื่องมือแก้ไขปัญหาความขัดแย้งกันเองที่เกิดขึ้นในแต่ละวิชาของคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่นที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 1.1 ถึงความขัดแย้งกันเองในวิชาเรขาคณิต ดังนี้

ข้อความของยูคลิด : ถ้า p เป็นจุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรง L แล้วจะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ลากผ่าน p และขนานกับ L

ข้อความของโบลไย : ถ้า p เป็นจุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรง L แล้วจะมีเส้นตรงมากกว่า 1 เส้นที่สามารถลากผ่าน p และขนานกับ L

ข้อความขัดแย้งกันนี้ทำให้วิชาการต่างๆที่มีเรขาคณิตของยูคลิดเป็นรากฐาน เริ่มสั่นคลอนเนื่องจากทฤษฎีบทของวิชาการนั้นๆอาจผิดทั้งหมด และเริ่มสงสัยกันว่าสิ่งที่เป็นจริงที่เห็นกันอยู่และพิสูจน์ได้โดยอาศัยพื้นฐานความรู้ของเรขาคณิตมาแต่แรก จะเป็นจริงบนรากฐานของอะไรกันแน่ แต่แล้วระบบสัจพจน์ก็เข้ามาช่วยแบ่งแยกเรขาคณิตให้ออกเป็นต่างระบบกันดังเช่นที่เรารู้จักกันในทุกวันนี้ในชื่อของ เรขาคณิตของยูคลิด (Euclidean Geometry) กับเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด (Non-Euclidean Geometry) ในที่นี้จะยกตัวอย่างระบบสัจพจน์ของยูคลิดเฉพาะส่วนเบื้องต้นของระบบเท่านั้น เพื่อให้เห็นตัวอย่างของระบบสัจพจน์ พร้อมกับชี้แจงสาเหตุของความขัดแย้งที่เกิดขึ้น

ระบบสัจพจน์ของยูคลิด (Euclidean System)

คำอนิยาม : "จุด" และ "เส้นตรง"

สัจพจน์ 1 : เส้นตรงเป็นเซตของจุด

สัจพจน์ 2 : มีจุดอย่างน้อย 2 จุด

สัจพจน์ 3 : จุด 2 จุดที่ต่างกันจะมีเส้นตรงลากผ่านเพียงเส้นเดียว

สัจพจน์ 4 : ถ้า L เป็นเส้นตรง แล้วจะมีจุดซึ่งไม่อยู่บน L

บทนิยาม 1 : จะกล่าวว่าเส้นตรง L_1 *ขนานกับ (Parallel to)* เส้นตรง L_2 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $L_1 // L_2$ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีจุดซึ่งอยู่ร่วมบนทั้ง L_1 และ L_2

สัจพจน์ 5 : ถ้า P เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง L แล้วจะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นซึ่งลากผ่าน P และขนานกับ L

ทฤษฎีบท 1 : จุดแต่ละจุดจะอยู่บนเส้นตรงอย่างน้อยสองเส้น

พิสูจน์ : ให้ p เป็นจุด โดยสัจพจน์ 2 จะมีจุด q อีกจุดหนึ่งซึ่งต่างจาก p และโดยสัจพจน์ 3 จะมีเส้นตรง L_1 ซึ่งลากผ่านจุด p และ q ดังนั้นโดยสัจพจน์ 4 จะมีจุด r ซึ่งไม่อยู่บน L_1 จึงทำให้ p และ r เป็นจุดที่ต่างกัน ซึ่งโดยสัจพจน์ 3 จะมีเส้นตรง L_2 ลากผ่าน p และ r แต่เนื่องจาก r ไม่อยู่บน L_1 ดังนั้น L_1 และ L_2 ไม่เป็นเส้นตรงเดียวกัน เพราะฉะนั้นมีเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ต่างกันโดยที่ p อยู่บนทั้ง L_1 และ L_2 //

ทฤษฎีบท 2 : เส้นตรงแต่ละเส้นจะมีจุดอย่างน้อยจุดหนึ่งอยู่บนเส้นตรงนั้น

พิสูจน์ : ให้ L เป็นเส้นตรง โดยสัจพจน์ 2 จะมีจุด p และถ้า p อยู่บน L เราก็จะได้ทฤษฎีบท แต่ถ้า p ไม่อยู่บน L แล้วโดยทฤษฎีบท 1 จะมีเส้นตรงที่ต่างกันอย่างน้อย 2 เส้นสมมติให้ชื่อ L_1 และ L_2 ที่ซึ่ง p อยู่บนทั้ง L_1 และ L_2 แต่โดยสัจพจน์ 5 ทำให้ L_1

และ L_2 จะขนานกับ L พร้อมกันไม่ได้ สมมติให้ L_1 ไม่ขนานกับ L เพราะฉะนั้นจะมีจุด q ซึ่งอยู่บนทั้ง L และ L_1 ซึ่งจะทำให้ q เป็นจุดที่ทฤษฎีบทต้องการ //

ทฤษฎีบท 3 : มีจุดอย่างน้อย 2 จุดอยู่บนเส้นตรงแต่ละเส้น

พิสูจน์ :ให้ L เป็นเส้นตรง โดยทฤษฎีบท 2 จะมีจุด p อยู่บนเส้นตรง L และโดยทฤษฎีบท 1 จะมีเส้นตรง K ซึ่ง $L \neq K$ และ p อยู่บน K เนื่องจาก $L \neq K$ ดังนั้นจะมีจุด q บน L แต่ไม่อยู่บน K หรือมีจุด q ซึ่งอยู่บน K แต่ไม่อยู่บน L

ถ้าเป็นกรณีแรก เราจะได้ทฤษฎีบท

แต่ถ้าเป็นกรณีหลัง เราจะได้โดยสัจพจน์ 4 ว่าจะมีจุด r ซึ่งไม่อยู่บน K โดยสัจพจน์ 5 จะมีเส้นตรง M เพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ลากผ่าน r และขนานกับ K เพราะฉะนั้น p ไม่อยู่บน M ถ้า M และ L ขนานกันจะค้านกับสัจพจน์ 5 (นั่นคือ L และ K ผ่านจุด p และขนานกับ M) ดังนั้นมีจุด x อย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งอยู่บนทั้ง M และ L แต่ p ไม่อยู่บน M (เพราะว่า M//K และ p อยู่บน K) ดังนั้น $p \neq x$ //

ทฤษฎีบท 4 : มีจุดที่ต่างกันอย่างน้อย 4 จุด

พิสูจน์ : โดยสัจพจน์ 2 จะมีจุดอย่างน้อย 2 จุดที่ต่างกัน สมมติให้ชื่อจุดทั้งสองเป็น p และ q ซึ่งโดยสัจพจน์ 3 จะมีเส้นตรง L ที่ลากผ่านจุด p และ q และโดยสัจพจน์ 4 จะมีจุด r ที่ไม่อยู่บน L แต่โดยสัจพจน์ 5 จะมีเส้นตรง K ที่ลากผ่านจุด r และขนานกับ L และสุดท้ายโดยทฤษฎีบท 3 เส้นตรง K จะผ่านจุดที่ต่างกันอย่างน้อย 2 จุด ซึ่งแสดงว่ามีจุด $s \neq r$ และอยู่บน K เพราะฉะนั้นมีจุด p, q, r และ s อย่างน้อย 4 จุดที่ต่างกัน //

ทฤษฎีบท 5 : มีเส้นตรงที่ต่างกันอย่างน้อย 6 เส้น

พิสูจน์ : โดยวิธีการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 4 จะได้ว่ามีเส้นตรงที่ต่างกันอย่างน้อย 2 เส้น สมมติคือ L_1 และ L_2 และจุดที่ต่างกันอย่างน้อย 4 จุด สมมติคือ p, q, r และ s โดยที่ L_1

ขนานกับ L_2 , p และ q อยู่บน L_1 และ r และ s อยู่บน L_2

โดยสัจพจน์ 3 จะมีเส้นตรง L_3 ผ่านจุด p และ r เส้นตรง L_4 ผ่านจุด q และ s เส้นตรง L_5 ผ่านจุด p และ s และเส้นตรง L_6 ผ่านจุด q และ r ซึ่งทำให้ได้

$L_1 \neq L_3$ และ $L_2 \neq L_3$ (เพราะว่า r ไม่อยู่บน L_1 และ p ไม่อยู่บน L_2)

$L_1 \neq L_4$ และ $L_2 \neq L_4$ (เพราะว่า s ไม่อยู่บน L_1 และ q ไม่อยู่บน L_2)

$L_1 \neq L_5$ และ $L_2 \neq L_5$ (เพราะว่า s ไม่อยู่บน L_1 และ p ไม่อยู่บน L_2)

$L_1 \neq L_6$ และ $L_2 \neq L_6$ (เพราะว่า r ไม่อยู่บน L_1 และ q ไม่อยู่บน L_2)

โดยสัจพจน์ 3 ถ้า $L_3 = L_4$ ทำให้ได้ $L_3 = L_1$ ถ้า $L_3 = L_5$ ทำให้ได้ $L_3 = L_1$, $L_3 = L_6$ ทำให้ได้ $L_3 = L_2$, $L_4 = L_5$ ทำให้ได้ $L_2 = L_4$, $L_4 = L_6$ ทำให้ได้ $L_1 = L_4$ และ $L_5 = L_6$ ทำให้ได้ $L_1 = L_2$ ซึ่งแย้งกับย่อหน้าก่อน

เพราะฉะนั้น L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, และ L_6 จึงเป็นเส้นตรงที่ต่างกันทั้งหมดตามต้องการ //

สังเกตว่าสัจพจน์ 1- 4 ของระบบสัจพจน์ของยูคลิด เป็นข้อความที่ยอมรับกันในสามัญสำนึกว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แต่การกำหนดสัจพจน์ 5 ค่อนข้างมีความหมายแตกต่างจากหรือดูเป็นคนละเรื่องราวกับสัจพจน์อื่นๆ โดยเฉพาะต้องมีการนิยามคำใหม่ "ขนานกัน" ขึ้นเสียก่อน และเมื่อเกิดปัญหาความขัดแย้งกันเองที่สัจพจน์ 5 นี้ด้วย จึงทำให้หลายคนคิดว่าสัจพจน์ 5 อาจเป็นทฤษฎีบทของระบบ จึงมีผู้ลองพยายามพิสูจน์สัจพจน์ 5 แต่ปรากฏว่าพิสูจน์ไม่ได้ และเมื่อลองแทนสัจพจน์ 5 ด้วยนิเสธของมันเองกลับปรากฏได้ระบบที่มีความสอดคล้องกันอย่างดี (consistency) ขึ้น 2 ระบบคือ

1. **ระบบเรขาคณิตของโลบาเชฟสกี (Lobachevsky's Geometry)** ซึ่งเป็นระบบที่แทนสัจพจน์ 5 ของระบบสัจพจน์ของยูคลิดด้วยสัจพจน์ที่ 5′ ต่อไปนี้

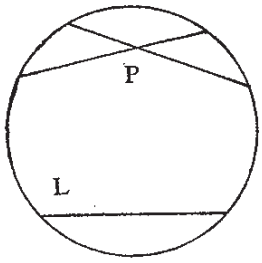
สัจพจน์ 5′ : ถ้า p เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง L แล้วจะมีเส้นตรงหลายเส้นที่ผ่าน p และขนานกับ L

ระบบนี้มีความสอดคล้องกันอย่างดีในเอกภพของจุดในวงกลม ดังรูปที่ 1 (ก)

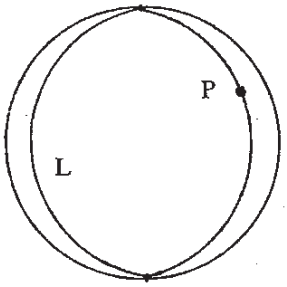
2. ระบบเรขาคณิตเชิงรีมานน์ (Riemannian Geometry) ซึ่งเป็นระบบที่แทนสัจพจน์ 5 ของระบบสัจพจน์ของยูคลิดด้วยสัจพจน์ที่ 5″ ต่อไปนี้

สัจพจน์ 5″ : ถ้า p เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง L แล้วจะไม่มีเส้นตรงที่ผ่าน p และขนานกับ L

ในระบบนี้ไม่มีเส้นตรงที่ขนานกัน นั่นคือเมื่อลากต่อเส้นตรงทุกเส้นออกไปจะพบกันเสมอ ระบบนี้มีความสอดคล้องกันอย่างดีในเอกภพของจุดบนทรงกลม ดังรูปที่ 1 (ข)



รูปที่ 1 (ก)



รูปที่ 1 (ข)

เมื่อเป็นเช่นนี้จึงย้อนกลับมาพิจารณารูปแบบของเอกภพของจุดที่จะทำให้ระบบสัจพจน์ของยูคลิดไม่เกิดความขัดแย้งกันเอง ซึ่งปรากฏว่าเอกภพของจุดต้องเป็นระนาบ (plane) ระบบเรขาคณิตของยูคลิดจึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า*เรขาคณิตบนระนาบ (Plane Geometry)* และเรียกระบบเรขาคณิตที่เกิดขึ้นใหม่ทั้งสองระบบข้างต้นรวมกันว่า*เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด (Non-Euclidean Geometry)*

การนำระบบสัจพจน์มาแก้ปัญหาความขัดแย้งกันเองเช่นนี้ยังมีตัวอย่างใน "ทฤษฎีเซตอันเกี่ยวกับสัจพจน์" ซึ่งจะได้กล่าวอย่างละเอียดในวิชาทฤษฎีเซต [14] ต่อไป

ในคณิตศาสตร์การแนะนำสิ่งใหม่อาจทำได้โดยการสร้างขึ้นในรูปของสิ่งที่เรารู้จักกันแล้ว หรือนั่นคือสร้างให้มีขึ้นในระบบสัจพจน์ที่มีอยู่แต่เดิมแล้ว หรืออาจแนะนำโดยการสร้างระบบสัจพจน์ของสิ่งนั้นๆขึ้นมาใหม่ และระบบสัจพจน์ของสิ่งใหม่ที่มีชื่อเสียงมากระบบหนึ่งในกลางศตวรรษที่ 19 ก็คือระบบสัจพจน์ของเปอาโน (Peano's Postulates) อันเป็นสัจพจน์ของระบบจำนวน(Numbers System) ที่เป็นรากฐานของแขนงวิชาคณิตศาสตร์ต่างๆนั่นเอง

ระบบสัจพจน์ของเปอาโน (Peano' s Postulates)

เปอาโน(Peano) เป็นชาวอิตาลี ได้ตั้งระบบสัจพจน์ขึ้นโดยกำหนดให้ "*เซต (sets)*" "*จำนวนธรรมชาติ (natural numbers)*" และ "*ตัวถัดไป (successors)*" เป็นคำอนิยาม กับสัจพจน์อีก 5 ข้อดังต่อไปนี้

สัจพจน์ 1 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x จะมีจำนวนธรรมชาติ x′ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่เป็นตัวถัดไปของ x

สัจพจน์ 2 : เซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด **N** ไม่เป็นเซตว่าง

สัจพจน์ 3 : มีจำนวนธรรมชาติ 1 ที่ไม่เป็นตัวถัดไปของจำนวนธรรมชาติตัวใด

สัจพจน์ 4 : สำหรับแต่ละคู่ของจำนวนธรรมชาติที่ต่างกัน จะมีตัวถัดไปต่างกันด้วย

สัจพจน์ 5 : ถ้า M เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้คือ

(ก) 1 เป็นสมาชิกของ M

(ข) ถ้าจำนวนธรรมชาติ x ตัวใดเป็นสมาชิกของ M แล้วตัวถัดไป x′ จะเป็นสมาชิกของ M ด้วย

แล้ว M คือเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด **N**

สัจพจน์ที่ 5 ของเปอาโนมีชื่อเสียงมากในการช่วยพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนธรรมชาติ จนกระทั่งเราให้ชื่อเรียกเพื่อเข้าใจตรงกันว่า "*หลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction)*"

จากการกำหนดคำอนิยาม 3 คำ และสัจพจน์ 5 ข้อดังข้างต้น เปอาโนก็สามารถพิสูจน์คุณสมบัติต่างๆของจำนวนธรรมชาติ พร้อมทั้งแนะนำโดยการสร้างจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะและจำนวนจริง รวมทั้งคุณสมบัติที่สำคัญของระบบจำนวนเหล่านี้ได้ทั้งหมด แต่ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างเฉพาะทฤษฎีบทของจำนวนธรรมชาติไว้พอเป็นสังเขปเท่านั้น สำหรับผู้สนใจสามารถอ่านรายละเอียดเกี่ยวกับระบบจำนวนได้ในหนังสือทฤษฎีเซต [14] ซึ่งแนะนำระบบสัจพจน์ของเปอาโนให้เป็นสิ่งใหม่ โดยการสร้างขึ้นในรูปของเซตในระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซต

ทฤษฎีบท 1 : แต่ละจำนวนธรรมชาติ x ไม่เป็นตัวถัดไปของ x

พิสูจน์ : ให้ M เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ x ที่ไม่เป็นตัวถัดไปของ x

(ก) โดยสัจพจน์ 1 เราจะได้ว่า 1 ไม่เป็นตัวถัดไปของ 1 ดังนั้น 1 เป็นสมาชิกของ M

(ข) ให้ x เป็นสมาชิกของ M แล้ว $x \neq x'$ ดังนั้นโดยสัจพจน์ 4 เราจะได้ $x' \neq (x')'$ ซึ่งแสดงว่า x' เป็นสมาชิกของ M

โดยสัจพจน์ 5 ทำให้สรุปได้ว่า M เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือจำนวนธรรมชาติทุกจำนวนไม่เป็นตัวถัดไปของตัวมันเอง //

ทฤษฎีบท 2 : จำนวนธรรมชาติทุกจำนวนที่ไม่ใช่ 1 จะเป็นตัวถัดไปของจำนวนธรรมชาติบางตัว

พิสูจน์ : ให้ M เป็นเซตที่มีสมาชิกคือ 1 และจำนวนธรรมชาติที่เป็นตัวถัดไปของจำนวนธรรมชาติบางตัว

(ก) โดยนิยามของ M เราจะได้ 1 เป็นสมาชิกของ M

และ (ข) ให้ x เป็นสมาชิกของ M แล้วโดยสัจพจน์ 1 จะได้ x' เป็นจำนวนธรรมชาติที่ซึ่งเป็นตัวถัดไปของ x ดังนั้น x' เป็นสมาชิกของ M

โดยสัจพจน์ 5 เราจะได้ M เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทุกจำนวน //

บทนิยาม 1 : สำหรับจำนวนธรรมชาติ x แต่ละจำนวน จะใช้สัญลักษณ์ $x+1$ แทนตัวถัดไปของ x หรือนั่นคือ $x+1 = x'$

บทนิยาม 2 : สำหรับจำนวนธรรมชาติ x และ y เรากำหนดให้

$$(x+y)' = x+y'$$

ทฤษฎีบท 3 : ถ้า x และ y เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้ว $x+y$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิสูจน์ : ให้ x เป็นจำนวนธรรมชาติ และ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ y ที่ซึ่ง $x+y$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

(ก) โดยบทนิยาม 1 และสัจพจน์ 1 เราจะได้ $x+1 = x'$ เป็นจำนวนธรรมชาติ ดังนั้น 1 เป็นสมาชิกของ M_x

(ข) ให้ k เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่งเป็นสมาชิกของ M_x ดังนั้นโดยนิยามของ M_x เราจะได้ $x+k$ เป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่งโดยสัจพจน์ 1 ทำให้ $(x+k)'$ เป็นจำนวนธรรมชาติ แต่โดยบทนิยาม 2

$$(x+k)' = x+k'$$

ดังนั้น $x+k'$ เป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่งแสดงว่า k' เป็นสมาชิกของ M_x ด้วย

โดยสัจพจน์ 5 เราจะได้ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด เพราะฉะนั้นแต่ละจำนวนธรรมชาติ x และแต่ละจำนวนธรรมชาติ y เราจะได้ $x+y$ เป็นจำนวนธรรมชาติ //

ทฤษฎีบท 4 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x, y และ z เราจะได้

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

พิสูจน์ : ให้ x และ y เป็นจำนวนธรรมชาติ และ $M_{x,y}$ เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ z ที่ซึ่ง $(x+y)+z = x+(y+z)$

(ก) โดยบทนิยาม 2 เราจะได้ $(x+y)' = x+y'$ แต่โดยบทนิยาม 1 เราจะได้ $(x+y)' = (x+y)+1$ และ $x+y' = x+(y+1)$

เพราะฉะนั้น $(x+y)+1 = x+(y+1)$ หรือ 1 เป็นสมาชิกของ $M_{x,y}$

(ข) ให้ k เป็นสมาชิกของ $M_{x,y}$ ดังนั้น $(x+y)+k = x+(y+k)$ ดังนั้นโดยสัจพจน์ 1 เราจะได้ $[(x+y)+k]' = [x+(y+k)]'$ แต่โดยบทนิยาม 2 ทำให้ได้

$$[(x+y)+k]' = (x+y)+k'$$

และ

$$[x+(y+k)]' = x+(y+k)' = x+(y+k')$$

เพราะฉะนั้น $(x+y)+k' = x+(y+k')$ หรือ k' เป็นสมาชิกของ $M_{x,y}$ ด้วย

โดยสัจพจน์ 5 เราจะได้ $M_{x,y}$ เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด นั่นคือ $(x+y)+z = x+(y+z)$ สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ z แต่ x และ y เป็นจำนวนธรรมชาติตัวใดก็ได้ตามกำหนด จึงได้ทฤษฎีบทเป็นจริง //

บทนิยาม 3 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x เรากำหนดให้

$$x.1 = x$$

บทนิยาม 4 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x และ y เรากำหนดให้

$$x.y' = x.y+x$$

ทฤษฎีบท 5 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x เราจะได้ $x+1 = 1+x$

พิสูจน์ : ให้ M เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ ที่ซึ่ง $x+1 = 1+x$

(ก) เนื่องจาก $1+1 = 1+1$ ดังนั้น 1 เป็นสมาชิกของ M

(ข) ให้ k เป็นสมาชิกของ M ดังนั้น $k+1 = 1+k$ ซึ่งโดยสัจพจน์ 1 ทำให้ได้ $(k+1)' = (1+k)'$ แต่โดยบทนิยาม 1 เราจะได้

$$(k+1)' = (k+1)+1 = k'+1$$

และโดยบทนิยาม 2 ทำให้ได้

$(1+k)' = 1+k'$

เพราะฉะนั้น $k'+1 = 1+k'$ ซึ่งแสดงว่า k' เป็นสมาชิกของ M ด้วยเช่นกัน

โดยสัจพจน์ 5 เราจะได้ M เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด //

ทฤษฎีบท 6 : สำหรับจำนวนธรรมชาติ x และ y เราจะได้ $x+y = y+x$ และ $x.y = y.x$

พิสูจน์ : ให้ x เป็นจำนวนธรรมชาติ และ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ y ที่ซึ่ง $x+y = y+x$

(ก) โดยทฤษฎีบท 4 เราจะได้ $1 \in M_x$

(ข) ให้ k เป็นสมาชิกของ M_x แล้ว $x+k = k+x$ ซึ่งโดยสัจพจน์ 1 ทำให้ $(x+k)' = (k+x)'$ และโดยบทนิยาม 2 เราจะได้

$(x+k)' = x+k'$

และ $(k+x)' = k+x' = k+(x+1)$ (โดยบทนิยาม 2 และบทนิยาม 1)

$= k+(1+x)$ (โดยทฤษฎีบท 5)

$= (k+1)+x$ (โดยทฤษฎีบท 4)

$= k'+x$ (โดยบทนิยาม 1)

เพราะฉะนั้น $x+k' = k'+x$

โดยสัจพจน์ 5 เราจะได้ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด และเนื่องจาก x เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ จึงได้ $x+y = y+x$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ x และ y ใดๆ

เราจะละที่เหลือไว้เป็นแบบฝึกหัด //

ทฤษฎีบท 7 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x และ y เราจะได้ $x.y$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิสูจน์ : ให้ x เป็นจำนวนธรรมชาติ และ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ y ที่ซึ่ง $x.y$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

(ก) โดยบทนิยาม 3 เราจะได้ $x.1 = x$ เป็นจำนวนธรรมชาติ ดังนั้น 1 เป็นสมาชิกของ M_x

(ข) ให้ k เป็นสมาชิกของ M_x แล้ว $x.k$ เป็นจำนวนธรรมชาติ และดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ $x.k+x$ เป็นจำนวนธรรมชาติด้วย แต่โดยบทนิยาม 4 จะได้ $xk' = x.k+x$ ซึ่งทำให้ $x.k'$ เป็นจำนวนธรรมชาติและนั่นคือ k' เป็นสมาชิกของ M_x ด้วย

โดยสัจพจน์ 5 เราจะได้ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด และเนื่องจาก x เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ จึงได้ทฤษฎีบทเป็นจริง //

ทฤษฎีบท 8 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x และ y เราจะได้ว่าแต่ละ $x+y$ หรือ $x.y$ แทนจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียว

พิสูจน์ : ให้ x เป็นจำนวนธรรมชาติ และ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ y ที่ซึ่ง $x+y$ แทนจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียว

(ก) โดยสัจพจน์ 1 เราได้ x' แทนจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียวซึ่งโดยบทนิยาม 1 ทำให้ $x' = x+1$ ดังนั้น 1 เป็นสมาชิกของ M_x

(ข) ให้ k เป็นสมาชิกของ M_x ดังนั้น $x+k$ แทนจำนวนธรรมชาติเพียงจำนวนเดียวซึ่งโดยสัจพจน์ 1 ทำให้ได้ $(x+k)'$ แทนจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียวเช่นกัน แต่โดยบทนิยาม 2 เรามี $(x+k)' = x+k'$ จึงได้ k' เป็นสมาชิกของ M_x ด้วย

โดยสัจพจน์ 5 เราจะได้ M_x เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด

สำหรับการพิสูจน์ $x.y$ จะละไว้เป็นแบบฝึกหัด //

บทนิยาม 5 : กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนธรรมชาติ เราจะกล่าวว่า "*x มากกว่า y*" หรือ "*y น้อยกว่า x*" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$x > y$$

ถ้ามีจำนวนธรรมชาติ p ที่ทำให้ $x = y+p$

ทฤษฎีบท 9 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x จะได้ว่า $x = 1$ หรือ $x > 1$

พิสูจน์ : สมมติว่า $x \neq 1$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2 จะมีจำนวนธรรมชาติ p ที่ซึ่ง $x = p'$ แต่โดยบทนิยาม 1 ซึ่งกำหนดให้ $p' = p+1$ เพราะฉะนั้น $x = p+1 = 1+p$ (โดยทฤษฎีบท 5)หรือ $x > 1$ ตามต้องการ //

ทฤษฎีบท 10 : สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ x และ y จะมีจำนวนธรรมชาติ n ที่ทำให้ $x.n > y$

พิสูจน์ : กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนธรรมชาติ

ถ้า $x = 1$ เราให้ $n = y+1$ แล้วจะได้

$x.n = 1.n = n$ (โดยบทนิยาม 3) $= y+1 > y$

แต่ถ้า $x \neq 1$ แล้วโดยทฤษฎีบท 2 จะมีจำนวนธรรมชาติ p ที่ซึ่ง $x = p'$ ซึ่งทำให้ $x = p+1$ ในกรณีเช่นนี้เราให้ $n = y$ แล้วจะได้

$x.n = n.x = n.p' = n.p+n$ (บทนิยาม 4)

$= n+n.p$ (ทฤษฎีบท 6)

$= y+n.p > y$

ไม่ว่ากรณีใดๆเราจะได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง //

เนื่องจากระบบสัจพจน์มีธรรมชาติของการกำเนิดจากการกำหนดกติกา นั่นคือกำหนดด้วยคำอนิยามและสัจพจน์โดยไม่ต้องหมายถึงสิ่งใดแน่นอนของโลกความเป็นจริง อันนี้ถือได้ว่าเป็นข้อดีของระบบเพราะทำให้ระบบของโลกความเป็นจริงใดก็ตามที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น และบทนิยามต่างๆของระบบสัจพจน์หนึ่งแล้ว ทฤษฎีบทของระบบสัจพจน์นั้นๆจะเป็นจริงในระบบของโลกความเป็นจริงด้วย ตัวอย่างเช่น สมมติว่าเราสร้างระบบสัจพจน์ซึ่งเริ่มต้นดังต่อไปนี้

คำอนิยาม : เซต S ของสมาชิก a, b, c, . . .

และความสัมพันธ์ของสมาชิกใน S ที่จะเรียกว่า "*อยู่ระหว่าง*"

บทนิยาม : ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ S เราจะใช้สัญลักษณ์

(abc)

เมื่อ b อยู่ระหว่าง a และ c

สัจพจน์ 1 : ถ้า (abc) แล้ว a, b และ c ไม่เป็นสมาชิกตัวเดียวกันของ S นั่นคือ

$a \neq b$, $b \neq c$ และ $a \neq c$

สัจพจน์ 2 : ถ้า (abc) แล้ว (cba)

สัจพจน์ 3 : ถ้า (abc) และ (bcd) แล้ว (abd) และ (acd)

สัจพจน์ 4 : ถ้า (abc) และ (acd) แล้ว (abd) และ (bcd)

สัจพจน์ 5 : ถ้า $a \neq b$, $b \neq c$ และ $a \neq c$ แล้วความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นจริงอย่างน้อย

ความสัมพันธ์หนึ่งคือ :- (abc) หรือ (bca) หรือ (cab)

ทฤษฎีบท : 1. ถ้า (abc) และ (abd) แล้วจะไม่มี (cad)

2. ถ้า (abd) และ (acd) แล้วจะไม่มี (bdc)

สังเกตว่าระบบสัจพจน์นี้จะไม่มีความหมายต่อสิ่งใดเลยถ้าเรากล่าวระบบนี้ไว้ลอยๆเช่นนี้ แต่ถ้าเราให้ a, b, c, . . . หมายถึง จุดบนเส้นตรงในระนาบ แล้วทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับจุดบนเส้นตรงของเรขาคณิตหลายทฤษฎีบทจะสามารถพิสูจน์ได้จากสัจพจน์ของระบบนี้ หรือถ้าเราให้ a, b, c, . . . คือจำนวน 1, 2, 3, . . . และ (abc) หมายถึง

1. $a < b$ และ $b < c$

หรือ 2. $a > b$ และ $b > c$

แล้วความหมายของ (abc) ก็คือความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" ระหว่างจำนวนที่เรารู้จักกันดีแล้วนั่นเอง เป็นต้น

แบบฝึกหัด

1. การสรุปความในข้อต่อไปนี้เป็นไปตามการให้เหตุผลแบบนิรนัย หรือแบบอุปนัย หรือไม่ใช่ทั้งสองอย่าง

1.1 คนทุกคนต้องตาย

1.2 ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก

1.3 นกทุกตัวไม่มีหู ดังนั้นค้างคาวไม่ใช่นก เพราะค้างคาวมีหู

1.4 นกทุกตัวมีปีก ถ้าแมวบางตัวเป็นนก แล้วเราคงได้เห็นแมวบางตัวมีปีก

1.5 สมศรีไปบ้านศรีนวลเป็นประจำและทุกครั้งที่ไปจะเห็นว่าบ้านของศรีนวลสกปรกรกรุงรัง ต่อมาศรีนวลทำขนมขาย สมศรีจึงบอกกับเพื่อนๆว่าอย่าซื้อขนมของศรีนวล เพราะสมศรีคิดว่าขนมของศรีนวลสกปรก

1.6 นางสาวแก้วเป็นคู่รักของนายจำรัสมาเป็นเวลากว่า 2 ปีแล้ว และทุกครั้งที่มีการนัดหมายกัน นายจำรัสก็ไม่เคยผิดนัดเลย แต่เมื่อสุดสัปดาห์ที่ผ่านมาเขาทั้งสองนัดกันว่าจะไปดูภาพยนตร์ ครั้นถึงเวลานัดนายจำรัสกลับโทรศัพท์มาบอกนางสาวแก้วว่าติดธุระกระทันหันไปไม่ได้ นางสาวแก้วไม่เชื่อและสรุปกับตนเองว่าจะต้องเป็นเพราะนายจำรัสมีนัดกับหญิงอื่นเป็นแน่

2. ในข้อต่อไปนี้เป็นการใช้เหตุผลแบบนิรนัย หรือแบบอุปนัยหรือไม่ เพราะเหตุใด

2.1 การสังหรณ์ 2.2 การคาดคะเน 2.3 การเดา

2.4 การทำนายโชคชะตาราศีตามตำราโหราศาสตร์

2.5 การตัดสินความตามข้อกฎหมายของผู้พิพากษาศาล

3. จงใช้เหตุผลแบบนิรนัย สรุปผลจากเหตุที่กำหนดให้ในข้อต่อไปนี้

3.1 ดอกไม้บางชนิดมีกลิ่นหอม สิ่งที่มีกลิ่นหอมราคาแพง

3.2 มนุษย์ทุกคนมีชีวิต สิ่งมีชีวิตทุกชนิดต้องตาย

3.3 ถ้าอากาศชื้นแล้วอุณหภูมิจะลดลง และถ้าอุณหภูมิลดลงแล้วจะเกิดหมอก

4. คำใดต่อไปนี้เป็นคำที่มีลักษณะเป็น "คำอนิยาม"

ถูก ผิด สว่าง มืด ดี เลว บาป บุญ

รัก เกลียด สีแดง อะตอม โมเลกุล มุม

เผ็ด หวาน ขม ร้อน เย็น เร็ว ช้า ลม

5. จงพิจารณาว่า บทนิยามต่อไปนี้เป็นบทนิยามที่ดีหรือไม่

5.1 สี่เหลี่ยมจัตุรัสคือสี่เหลี่ยมที่มีมุมทั้งสี่เป็นมุมฉากและด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน

5.2 สามเหลี่ยมด้านเท่าคือรูปที่มีด้านสามด้านและด้านทั้งสามยาวเท่ากัน

5.3 สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคือสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน

5.4 สิ่งที่มีเหตุผลคือสิ่งที่ยอมรับแล้วสบายใจ

5.5 นกคือสัตว์ที่บินได้

5.6 พ่อคือสามีของแม่

6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้อยู่ในลักษณะที่เป็นสัจพจน์ได้หรือไม่ ถ้าเป็นได้จะเป็นสัจพจน์ลักษณะใด

6.1 สิ่งมีชีวิตทุกชนิดต้องตาย

6.2 ปลาเป็นสัตว์น้ำ

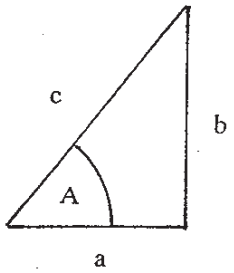
6.3 ความนิยมตามสมัยนิยม

6.4 ระเบียบข้อบังคับของมหาวิทยาลัย

6.5 กติกาการเล่นฟุตบอล

6.6 คนทุกคนตายแล้วย่อมเกิดอีก

7. สมมติว่าเราเริ่มต้นเรียนวิชาตรีโกณมิติด้วยการกำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



โดยที่ $\sin A = \frac{b}{c}$ และ $\cos A = \frac{a}{c}$ ดังนั้น

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

จงเขียนระบบสัจพจน์โดยระบุ สัจพจน์ คำอนิยาม คำนิยาม ตลอดจนทฤษฎีบท ที่ท่านต้องอ้างถึงในการพิสูจน์ผลของวิชาตรีโกณมิติข้างต้น

บทที่ 2

ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

2 . 1 บทนำ

ภาษาสำหรับการพูด การเขียน ของมนุษย์เรามีอยู่ด้วยกันหลายภาษา เช่น ภาษาไทย ภาษาอังกฤษ ภาษาลาติน ภาษาฝรั่งเศส เป็นต้น แต่ละภาษาจะมีความสำคัญในการสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกันในกลุ่มของผู้ที่ใช้ภาษานั้นๆ จึงทำให้ต้องตกลงกันใช้ "คำ" และ "ประโยค" ภายใต้กฎเกณฑ์ของแต่ละภาษาที่เรียกกันว่า "ไวยากรณ์ของภาษา" ซึ่งไม่ว่าจะเป็นภาษาใดก็ตามจะประกอบด้วย "คำพื้นฐาน" "คำนิยาม" และ "ไวยากรณ์" ของการสร้าง "ประโยค" เพื่อใช้สื่อความหมาย สำหรับคณิตศาสตร์ดังที่ได้กล่าวแล้วในบทที่ 1 ว่า "ความจริง" ของคณิตศาสตร์เป็นความจริงที่ขึ้นอยู่กับหรือสัมพันธ์กับ "ความจริง" ของสิ่งที่มีอยู่ก่อนเป็นเบื้องต้น ที่เรียกกันว่า "คำอนิยาม" "คำนิยาม" และ "สัจพจน์" ดังนั้นเพื่อให้เข้าใจหรือยอมรับ "ความจริง" ที่ตรงกัน จึงต้องมี "กฎเกณฑ์" ของ "การสรุปด้วยเหตุผล" ซึ่งอาจเปรียบได้กับไวยากรณ์ของภาษาที่มนุษย์ใช้ในชีวิตประจำวันดังกล่าวข้างต้น แต่เนื่องจาก "กฎเกณฑ์" ที่จะสร้างขึ้นจะต้องมีรูปแบบที่แน่นอนของการกำหนด "จริง" และ "เท็จ" "ลักษณะการให้เหตุผล" "การสรุปผลจากเหตุ" นอกจากนี้ยังต้องสอดคล้องและสามารถใช้ได้กับทุกระบบสัจพจน์ จึงต้องกำหนด "กฎเกณฑ์" ในรูป "สัญลักษณ์" เพราะภาษาในรูปสัญลักษณ์จะมีรูปแบบที่แน่นอนโดยไม่ยึดความหมายเป็นหลัก ไม่มีความกำกวมเนื่องจากการเล่นสำนวนโวหาร หรือการใช้คำที่รุงรัง เราจึงเรียกภาษาคณิตศาสตร์นี้ว่า "*ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic)*"

2 . 2 ประโยคคณิตศาสตร์

ประโยคของภาษาในชีวิตประจำวันมีอยู่ด้วยกันหลายชนิด เช่น ประโยคคำสั่ง ประโยคคำถาม ประโยคบอกเล่า เป็นต้น และในกลุ่มของชนิดของประโยคเหล่านี้ก็มีเพียงประโยคบอกเล่าเท่านั้นที่จะสามารถบอก *ค่าความจริง (truth-value)* นั่นคือ "จริง (T)" หรือ "เท็จ(F)" ได้เช่น "เชียงใหม่อยู่ทางภาคเหนือของไทย" "โลกแบน" หรือ "ธงชาติไทยมี 3 สี" เป็นต้น แต่บางครั้งค่าความจริงของประโยคบอกเล่าของภาษาในชีวิตประจำวันก็ขึ้นอยู่กับ เหตุการณ์

สถานที่ และสภาพแวดล้อม เช่น "ฉันหิว" "เขาเหนื่อย" "เกาะสมุยอยู่ไกล" เป็นต้น และดังที่กล่าวแล้วว่า ภาษาของตรรกศาสตร์จะต้องมีรูปแบบที่แน่นอนโดยเฉพาะอย่างยิ่งการกำหนดค่าความจริง ดังนั้นประโยคในตรรกศาสตร์จึงต้องเป็นประโยคบอกเล่าที่สามารถบอกค่าความจริงว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น ในทุกเหตุการณ์ สถานที่และสภาพแวดล้อม

บทนิยาม 1 : *ประพจน์ (proposition)* หรือ *ข้อความ (statement)* คือประโยคบอกเล่าซึ่งมีค่าความจริงเป็น "จริง(T)" หรือ "เท็จ (F)" เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

แบบฝึกหัด 1

จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่

1. ใครจะอยู่ค้ำฟ้า
2. ใครๆก็อยู่ค้ำฟ้า
3. ขอให้สอบผ่านทุกคน
4. เธอเป็นคนสวย
5. ประโยคนี้เป็นจริง
6. ห้ามเดินลัดสนาม
7. ไม่อ้วนเอาเท่าไร
8. มีคนสวยในห้องนี้
9. เป็ดบินได้
10. เวลาและวารีไม่ยินดีจะคอยใคร

ประพจน์หรือข้อความเท่านั้นที่เป็นประโยคในตรรกศาสตร์ เราอาจจำแนกประพจน์ออกได้เป็น 2 ชนิดคือประพจน์ที่ไม่มีประพจน์อื่นประกอบอยู่ และสามารถบอกค่าความจริงได้ด้วยความหมายของประพจน์นั้นเอง ซึ่งจะเรียกว่า *ประพจน์เชิงเดียว* หรือ *ข้อความเชิงเดียว (simple proposition)* กับประพจน์ที่มีประพจน์อื่นเป็นส่วนประกอบ และมีค่าความจริงขึ้นกับประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบ ซึ่งจะเรียกว่า *ประพจน์เชิงประกอบ* หรือ *ข้อความเชิงประกอบ (compound proposition)*

เรานิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเดียวโดดๆแทนประพจน์ใดประพจน์หนึ่งที่กล่าวถึง เช่น a, b, c, . . . , p, q, r, . . . หรือ A, B, C , . . . เป็นต้น ส่วน*ตัวเชื่อมประพจน์ (connectives)* ในตรรกศาสตร์ เพื่อได้ประพจน์เชิงประกอบอื่นๆ มีอยู่ด้วยกัน 5 แบบ ดังตาราง

แสดงชื่อและสัญลักษณ์ของแต่ละตัวเชื่อมประพจน์ข้างล่างนี้

คำเชื่อมข้อความ	สัญลักษณ์	ชื่อทางตรรกศาสตร์
1. "ไม่"	$\neg$	ตัวเชื่อมนิเสธ
2. "และ"	$\wedge$	ตัวเชื่อมความร่วม
3. "หรือ"	$\vee$	ตัวเชื่อมการเลือก
4. "ถ้า ... แล้ว ..."	$\rightarrow$	ตัวเชื่อมแบบมีเงื่อนไข
5. "ก็ต่อเมื่อ"	$\leftrightarrow$	ตัวเชื่อมผันกลับได้

1. *นิเสธของประพจน์ p (Negation* หรือ *Deny)* คือข้อความในรูปสัญลักษณ์ "$\neg$ p" ซึ่งเราจะอ่านว่า "ไม่ p" หรือ "ไม่สอดคล้อง p" เช่น

p	$\neg$ p
1. มุมที่ฐานเท่ากัน	1′ มุมที่ฐานไม่เท่ากัน
2. a ใหญ่กว่า b	2′ a ไม่ใหญ่กว่า b

เป็นต้น ถ้าประพจน์ p มีค่าความจริงเป็น "จริง(T)" แล้ว $\neg$ p จะเป็น "เท็จ(F)" และโดยกลับกัน เราจึงเขียนตารางแสดงค่าความจริงของ p และ $\neg$ p ในแต่ละกรณีได้ดังนี้

p	$\neg$ p
T	F
F	T

ตาราง 1

2. *ข้อความร่วมของสองประพจน์(connective statement)* คือข้อความในรูป "p และ q" หรือ

"ทั้ง p และ q" ซึ่งเราจะเขียนแทนข้อความเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์

"$p \wedge q$"

ข้อความ $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็น "จริง(T)" เมื่อทั้งประพจน์ p และประพจน์ q เป็นจริงทั้งคู่ และมีค่าความจริงเป็น "เท็จ(F)" เมื่อประพจน์ใดประพจน์หนึ่งของ p และ q หรือทั้งสองประพจน์เป็นเท็จ ซึ่งเราสามารถเขียนตารางแสดงค่าความจริงของ "$p \wedge q$" ในแต่ละกรณีได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตาราง 2

บทนิยาม 2 : เราจะเรียกตารางแสดงค่าความจริงของข้อความต่างๆในแต่ละกรณีเช่นตาราง 1 และตาราง 2 ข้างต้นนี้ว่า *ตารางค่าความจริง (Truth Table)*

3. ประโยคบอกเล่า "p หรือ q" ของภาษาในชีวิตประจำวัน โดยมากเราหมายถึง *ข้อความที่เกี่ยวกับการเลือก* "อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว" เช่น

"วันนี้คุณจะไปเชียงใหม่หรือหาดใหญ่"

จะเห็นว่าจะเลือกทั้งสองอย่างไม่ได้ แต่ก็อาจมีบ้างที่จะยอมให้มีการเลือกทั้งสองอย่าง เช่น

"นักศึกษาที่จะลงทะเบียนเรียนวิชา ค. จะต้องสอบผ่านวิชา ก. และ/หรือ วิชา ข. มาก่อน"

ในกรณีนี้ผู้ที่ลงทะเบียนวิชา ค. อาจสอบผ่านวิชา ก. หรือวิชา ข. อย่างใดอย่างหนึ่ง หรือสอบผ่านมาแล้วทั้งสองวิชาก็ได้

ส่วนข้อความที่เกิดจากตัวเชื่อมการเลือก "หรือ" ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$p \vee q$" เราจะหมายถึง *ข้อความเลือก(disjunctive statement)* ที่สามารถเลือกได้แบบ "*และ/หรือ* " นั่นคืออาจเกิดขึ้นได้ทั้งสองอย่างที่จะต้องเลือก ดังนั้นค่าความจริงของ "$p \vee q$" เป็น "จริง(T)"

เมื่ออย่างน้อยประพจน์หนึ่งของ p และ q หรือทั้งคู่เป็นจริง ส่วนกรณีนอกเหนือจากนี้ จะเป็น "เท็จ(F)" ดังจะแสดงค่าความจริงของ "$p \vee q$" แต่ละกรณีในตารางค่าความจริงข้างล่างนี้

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตาราง 3

4. การสรุปที่ดีทางคณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดทฤษฎีบทมากมายอันหนึ่งคือ*การสรุปแบบแจงเหตุสู่ผล* ซึ่งลักษณะการสรุปสามารถเขียนได้ในรูปข้อความที่มีตัวเชื่อมแบบมีเงื่อนไข "ถ้า . . . แล้ว . . ." หรือนั่นคือข้อความในรูปสัญลักษณ์ "$p \rightarrow q$" ที่เรียกกันว่า *ข้อความแจงเหตุสู่ผล (conditional statement)* เพราะโดยสามัญสำนึกแล้ว ถ้าประพจน์ p เป็นจริง แล้วประพจน์ q เป็นจริงด้วย เช่น

"ถ้าอาชญากรถูกจับ แล้วเขาจะถูกลงโทษ"

"ถ้าฝนตก แล้วพื้นย่อมเปียก"

"ถ้าเส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน แล้วจะเกิดมุมฉากขึ้น"

สังเกตด้วยว่าถ้าประพจน์ p เป็นเท็จแล้วประพจน์ "$p \rightarrow q$" จะเป็นจริงไม่ว่า q จะเป็นจริงหรือเท็จก็ตาม เช่นข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอคือ

"ถ้าฉันได้เป็นนายกรัฐมนตรี แล้วฉันจะเป็นที่รู้จักของคนทั่วไป"

ดังนั้นค่าความจริงของข้อความ "$p \rightarrow q$" ในแต่ละกรณีจึงเป็นดังตาราง 4

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตาราง 4

ประพจน์ p ของ "$p \rightarrow q$" เป็น *ข้อความเหตุ (antecedent)* หรือ *สมมติฐาน (assumption)* ส่วนประพจน์ q เป็น *ข้อสรุป* หรือ *ผล* หรือ *ข้อยุติ (conclusion)* คำว่า "แล้ว" ของข้อความแจงเหตุสู่ผลอาจถูกละไว้โดยไม่ทำให้ความหมายของข้อความเปลี่ยนแปลง แต่การเขียน "แล้ว" ไว้จะทำให้เห็นชัดเจนว่า ข้อความใดเป็น "เหตุ" และข้อความใดเป็น "ผล" และยังมีการเขียนซึ่งชี้ให้เห็น "เหตุ" และ "ผล" ชัดเจนโดยละคำว่า "แล้ว" เช่น

"q ถ้า p" หรือ "p ต่อเมื่อ q"

เป็นต้น นั่นคือเขียนผลสรุปก่อน ตัวอย่างเช่น

"มุมสองมุมจะเท่ากัน ถ้าต่างก็เป็นมุมฉาก"

"นักเรียนจะมาโรงเรียน ถ้าฝนไม่ตก"

นอกจากคำว่า "ถ้า" ยังอาจเขียนแทนได้ด้วยคำอื่นๆอีก เช่น "เมื่อใดก็ตามที่" หรือ "สมมติว่า" ซึ่งเป็นการเขียนในลักษณะตั้งสมมติฐานนั่นเอง เช่น

"เด็กชายแดงจะมาโรงเรียนเมื่อใดก็ตามที่ฝนไม่ตก"

ยังมีรูปแบบอื่นที่ให้ความหมายเป็นข้อความแจงเหตุสู่ผล เช่น

"พลเมืองดีย่อมปฏิบัติตามกฎหมาย"

"เพชรเป็นสารแข็งแกร่ง"

"แมงมุมไม่ใช่แมลง"

เป็นต้น ซึ่งเราสามารถนำมาเขียนใหม่ในรูป "$p \rightarrow q$" ให้ชัดเจนได้ดังนี้

"ถ้าเขาเป็นพลเมืองดี แล้วเขาจะปฏิบัติตามกฎหมาย"

"ถ้าสารนั้นเป็นเพชรแล้วมันจะแข็งแกร่ง"

"ถ้าตัวนี้คือแมงมุมแล้วมันจะไม่ใช่แมลง"

แม้ว่าข้อความ "ถ้าฝนตกแล้วฉันต้องกางร่ม" จะเป็นจริงแต่ก็ไม่แน่ว่าข้อความ "ถ้าฉันกางร่มแล้วฝนต้องตก" จะต้องเป็นจริงด้วย และสำหรับกรณีทั่วไปเมื่อเราพิจารณาตารางค่าความจริงของข้อความ "$p \rightarrow q$" ร่วมกับตารางค่าความจริงของข้อความ "$q \rightarrow p$" จะเห็นว่ามีบางกรณีที่ข้อความทั้งสองมีค่าความจริงต่างกัน หรือนั่นคือค่าความจริงของ "$q \rightarrow p$" ไม่ขึ้นกับค่าความจริงของ "$p \rightarrow q$" และเนื่องจากทั้งข้อความ "$q \rightarrow p$" และ "$p \rightarrow q$" มีบทบาทมากมายในการกล่าวถึงข้อความต่างๆในคณิตศาสตร์เราจึงให้ชื่อเรียกข้อความ "$q \rightarrow p$" ว่า *บทกลับ (converse)* ของ "$p \rightarrow q$" หรือกล่าวได้ว่า

"บทกลับของข้อความแจงเหตุสู่ผล คือข้อความแจงเหตุสู่ผลที่เกิดจากการเขียนสลับที่ของ "เหตุ" และ "ผล" ของข้อความแจงเหตุสู่ผลเดิม"

เพราะฉะนั้น "$q \rightarrow p$" เป็นบทกลับของ "$p \rightarrow q$" ในขณะที่ "$p \rightarrow q$" เป็นบทกลับของ "$q \rightarrow p$"

นอกจากนี้ยังมีข้อความในรูปข้อความแจงเหตุสู่ผลอีกสองข้อความคือ ข้อความ "$\neg p \rightarrow \neg q$" ซึ่งเราจะเรียกว่า *ข้อความตรงข้าม(opposite)* ของ "$p \rightarrow q$" หรือกล่าวได้ว่า

"ข้อความตรงข้ามของข้อความแจงเหตุสู่ผล คือข้อความแจงเหตุสู่ผลที่มี "เหตุ" และ "ผล" เป็นนิเสธของ "เหตุ" และ "ผล" ของข้อความแจงเหตุสู่ผลเดิมตามลำดับ"

และถ้าพิจารณาตารางค่าความจริงของทั้งสองข้อความจะเห็นว่าค่าความจริงของข้อความทั้งสองไม่ขึ้นต่อกัน

สุดท้ายคือ *ข้อความแย้งสลับที่ (contrapositive)* "$\neg q \rightarrow \neg p$" ของข้อความ "$p \rightarrow q$" แต่ข้อความทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันในทุกกรณี

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

ตาราง 5

5. สำหรับข้อความที่ได้จาก *ตัวเชื่อมผันกลับได้ (biconditional statement)* คือข้อความในรูป "$p \leftrightarrow q$" ซึ่งเราจะอ่านว่า "p ก็ต่อเมื่อ q" ข้อความลักษณะนี้มีประโยชน์สำหรับการให้นิยาม เช่น

"เส้นตรง L_1 และ L_2 ตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ L_1 ทำมุมฉากกับ L_2"

"สามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ก็ต่อเมื่อ ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปนั้นยาวเท่ากัน"

เราจะพิจารณาข้อความ "$p \leftrightarrow q$" ในรูปข้อความที่เกิดจากการเชื่อมข้อความ "$p \rightarrow q$" กับ "$q \rightarrow p$" ด้วยตัวเชื่อมความร่วม ดังนั้น p และ q ในข้อความ "$p \leftrightarrow q$" จึงเป็นเหตุและผลของกันและกัน

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ตาราง 6

แบบฝึกหัด 2

1. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้อยู่ในรูปข้อความเชิงประกอบที่ได้จากตัวเชื่อมข้อความใด
   1.1 เด็กคนนั้นเจ็บจริงหรือแสร้งทำ
   1.2 ต้นไม้จะงอกงามดีถ้าคุณรดน้ำอย่างสม่ำเสมอ
   1.3 ฝนตกเป็นเหตุให้อากาศเย็นลง
   1.4 การจราจรในกรุงเทพมหานครหนาแน่นทั้งทางบกและทางน้ำ
   1.5 ประชาธิปไตยของไทยจะพัฒนาก็ต่อเมื่อคนไทยทุกคนมีจิตสำนึกในสิทธิและหน้าที่
   1.6 ขีดจำกัดบนมักไม่มีที่สิ้นสุด
   1.7 ความไม่แน่นอนคือความแน่นอน และความแน่นอนคือความไม่แน่นอน
   1.8 ก็เพราะว่านายแดงขยันเรียนจึงสอบผ่านหมดทุกวิชา
   1.9 ปลาเป็นสัตว์น้ำแต่นกเป็นสัตว์บก
   1.10 สามเหลี่ยมหน้าจั่วคือสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันสองด้าน
2. จงให้สัญลักษณ์กับประพจน์เชิงเดียวที่เป็นส่วนประกอบของแต่ละข้อความในข้อ 1 พร้อมทั้งเขียนข้อความเชิงประกอบนั้นๆ ในรูปสัญลักษณ์
3. จงเขียนนิเสธของข้อความต่อไปนี้
   3.1 สิ่งดีที่สุดที่จะให้กับศัตรูคือการให้อภัย

3.2 ทุกคนมีความคิดเชิงสร้างสรรค์

3.3 ขีดจำกัดบนไม่มีที่สิ้นสุด

3.4 เจ้าหน้าที่สาธารณสุขพยายามรณรงค์ต่อต้านความสกปรกและโรคติดต่อ

3.5 นกไม่เป็นสัตว์น้ำ

3.6 ไม่มีใครอยู่ค้ำฟ้า

4. กำหนดให้

p : เส้นผ่าศูนย์กลางของโลกยาว 3,000 ไมล์

w : 3 ใน 8 ของ 16 คือ 6

r : ดาวพฤหัสโคจรรอบดวงอาทิตย์

s : 2+4 = 7

q : โลกเป็นดาวเคราะห์

t : 0.75 เป็นจำนวนเต็ม

จงบอกค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

4.1 $p \vee w$	4.2 $p \rightarrow s$	4.3 $q \leftrightarrow r$
4.4 $w \rightarrow s$	4.5 $s \rightarrow q$	4.6 $q \wedge p$
4.7 $\neg p \wedge \neg w$	4.8 $\neg p$	4.9 $\neg q \vee t$
4.10 $w \rightarrow p$	4.11 $(q \wedge r) \rightarrow s$	4.12 $(q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

5. จงสร้างตารางค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

5.1 $\neg q \vee (p \rightarrow \neg q \wedge p)$

5.2 $(p \rightarrow q) \rightarrow [\neg (q \wedge r) \rightarrow \neg (r \wedge p)]$

5.3 $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$

5.4 $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

5.5 $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow r]$

2 . 3 การวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความ

เนื่องจากข้อความเชิงประกอบเกิดจากการนำประพจน์เชิงเดียวตั้งแต่หนึ่งประพจน์ขึ้นไปมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ ดังนั้นเราจึงอาจใช้ตารางค่าความจริงแสดงค่าความจริงของข้อความเชิงประกอบนั้นๆ เมื่อประพจน์เชิงเดียวมีค่าความจริงในกรณีต่างๆทุกกรณีที่เป็นไปได้ ตัวอย่างเช่นตารางค่าความจริงของข้อความ "$p \wedge q \rightarrow p$" เป็นดังตาราง 7 ข้างล่างนี้

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

ตาราง 7

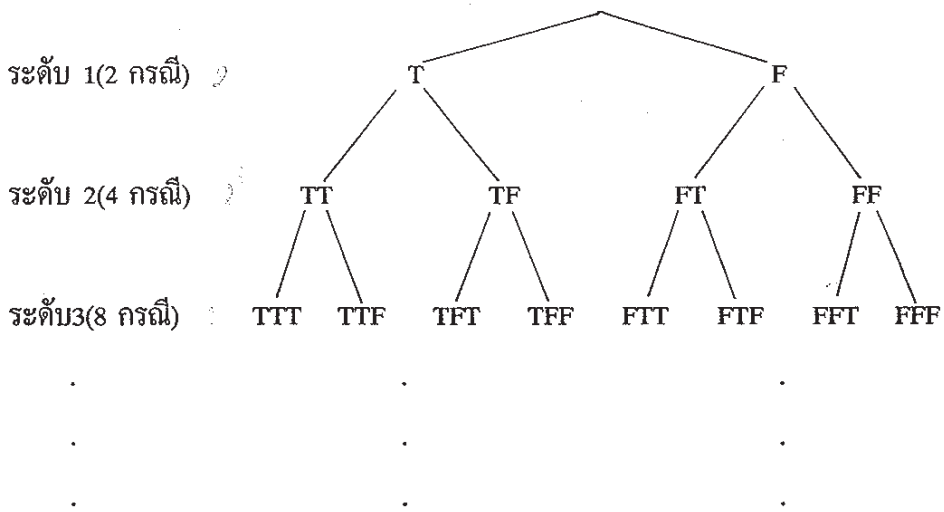
หรือ ตารางค่าความจริงของข้อความ "$(p \rightarrow q) \rightarrow r$" จะเป็นดังตาราง 8

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

ตาราง 8

สังเกตว่าแต่ละประพจน์เชิงเดียวมีค่าความจริงที่เป็นไปได้ 2 กรณีคือ จริง(T)หรือ เท็จ(F) ดังนั้นจำนวนกรณีของค่าความจริงของข้อความเชิงประกอบจะเท่ากับจำนวนฟังก์ชันทั้งหมดจากเซตของประพจน์เชิงเดียวที่เป็นส่วนประกอบไปยังเซต {T, F} ดังจะแสดงแผนภาพ

จำนวนกรณีไว้ในแต่ละระดับ n ซึ่งข้อความเชิงประกอบ ประกอบด้วยประพจน์เชิงเดียว n ประพจน์ ดังต่อไปนี้



เนื่องจากจำนวนกรณีของตารางค่าความจริงขึ้นอยู่กับจำนวนประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบ บางครั้งจึงทำให้ตารางค่าความจริงมีจำนวนบรรทัดมากมาย ทำให้ไม่สะดวกในการวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความ เราจึงพิจารณาหาวิธีอื่นที่จะสามารถวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความได้ ซึ่งพอจะรวบรวมแบ่งออกได้เป็น 3 แบบต่อไปนี้

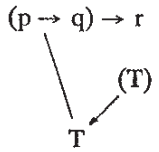
แบบที่ 1 : เราพิจารณาจากตาราง 1 ถึงตาราง 4 จะเห็นว่าค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบประพจน์หนึ่ง บางกรณีอาจทำให้บอกค่าความจริงของข้อความเชิงประกอบได้ทันที โดยไม่ต้องทราบค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบอื่นๆดังนี้

ประพจน์เชิงเดียว	ข้อความเชิงประกอบ
p เป็นจริง	$p \vee q$ เป็นจริง
	$q \rightarrow p$ เป็นจริง
p เป็นเท็จ	$p \wedge q$ เป็นเท็จ
	$p \rightarrow q$ เป็นจริง

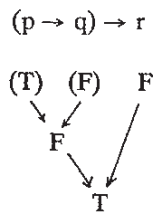
ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาลักษณะของข้อความเชิงประกอบที่กำหนดให้ จะทำให้เราแบ่งแยกกรณีพิจารณาในลักษณะดังกล่าว แล้วจะได้ตารางค่าความจริงที่ลดจำนวนบรรทัดลงมากดังจะแสดงโดยอาศัยแผนภาพต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 : จงวิเคราะห์ค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

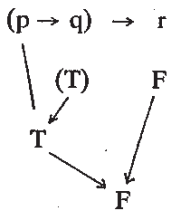
กรณี 1



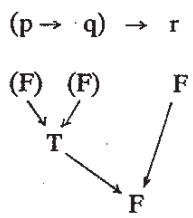
กรณี 2



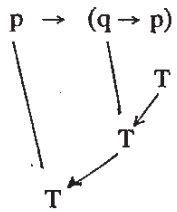
กรณี 3



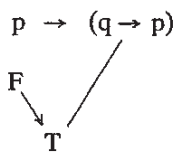
กรณี 4



ตัวอย่าง 2 : จงวิเคราะห์ค่าความจริงของ $p \rightarrow (q \rightarrow p)$



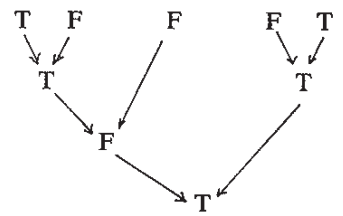
หรือ



แบบที่ 2 : การหาค่าความจริงของข้อความเชิงประกอบ เมื่อกำหนดค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบมาให้ จะทำให้เราใช้วิธีของแบบที่ 1 แต่ลดกรณีลงดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 : ค่าความจริงของ $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow (q \rightarrow p)$ เมื่อกำหนดให้ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ แสดงได้ด้วยแผนภาพข้างล่างนี้

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow (q \rightarrow p)$$



แบบที่ 3 : เนื่องจากประพจน์หนึ่งมีค่าความจริงที่เป็นไปได้เพียง 2 กรณีเท่านั้น ดังนั้น เมื่อถูกกำหนดให้แสดงว่าค่าความจริงของข้อความหนึ่งเป็นจริงหรือเท็จ เราอาจสมมติในทางตรงข้ามว่าไม่เป็นดังที่ต้องการ แล้ววิเคราะห์ให้ได้ว่ากรณีที่สมมตินี้ทำให้มีประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบประพจน์หนึ่งเป็นจริงและเท็จพร้อมกัน ซึ่งเป็นไปไม่ได้

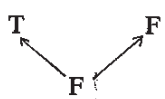
ตัวอย่าง 4 : จงแสดงว่าข้อความ $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ เป็นจริงเสมอ

วิธีทำ : ในการวิเคราะห์เราสมมติว่าข้อความ $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ เป็นเท็จ นั่นคือเราจะได้แผนภาพ

$$p \underset{F}{\rightarrow} (q \rightarrow p)$$

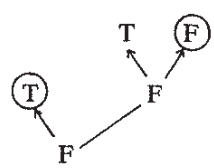
ซึ่งทำให้สามารถคิดค่าความจริงย้อนขึ้นโดยอาศัยตารางของตัวเชื่อมประพจน์ "$\rightarrow$" ได้แผนภาพดังนี้

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$



และในที่สุดจะได้ค่าความจริงของประพจน์เชิงเดียวทุกประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบ

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$



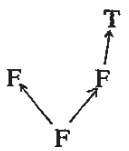
จากที่วงกลมไว้ แสดงประพจน์ที่ให้ค่าความจริงเป็นจริงและเท็จพร้อมกัน ดังนั้นในกรณีที่เราสมมติไว้จึงเป็นไปไม่ได้

หมายเหตุ : วิธีการของตัวอย่างนี้ทำให้เห็นว่าเราสามารถหาค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบได้เช่นกันเมื่อทราบค่าความจริงของข้อความเชิงประกอบ

ตัวอย่าง 5 : จงหาค่าความจริงของข้อความ $p \vee \neg q$ เมื่อกำหนดให้ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง

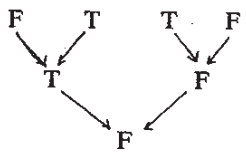
วิธีทำ : สมมติให้ $p \vee \neg q$ เป็นเท็จ จะทำให้วิเคราะห์ค่าความจริงของ p และ q ได้ดังแผนภาพ

$p \vee \neg q$



ซึ่งจะทำให้ได้แผนภาพแสดงค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ เป็นดังนี้

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$



ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนด จึงสรุปได้ว่า $p \vee \neg q$ เป็นจริง //

แบบฝึกหัด 3

1. จงหาค่าความจริงของข้อความ $p \wedge q$ เมื่อกำหนดให้ q เป็นเท็จ
2. จงหาค่าความจริงของข้อความ $p \vee q$ เมื่อกำหนดให้ q เป็นจริง
3. จงหาค่าความจริงของข้อความ $p \rightarrow q$ เมื่อกำหนดให้ q เป็นจริง
4. จงหาค่าความจริงของข้อความ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ เมื่อกำหนดให้ q เป็นเท็จ
5. กำหนดให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

   $p \rightarrow (q \rightarrow r)$; $(r \wedge t) \rightarrow \neg s$; $\neg w \rightarrow (t \wedge s)$

   จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

   5.1 $(p \wedge q) \rightarrow w$ 5.2 $(r \wedge s) \rightarrow w$

   5.3 $q \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$ 5.4 $(q \vee r) \rightarrow t$

   5.5 $(s \wedge p) \rightarrow (q \rightarrow \neg t)$
6. จงบอกค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้ เมื่อกำหนดค่าความจริงของบางประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบมาให้

   6.1 $\underset{T}{(p \wedge q)} \wedge (p \vee q)$ 6.2 $\underset{F}{(p \wedge q)} \rightarrow (r \vee s)$

   6.3 $\underset{F}{(p \rightarrow q)} \leftrightarrow (\neg q \vee p)$ 6.4 $\underset{T}{(p \vee q)} \rightarrow \underset{F}{(r \wedge s)}$
7. กำนันตำบลสามกระบือเผือก จังหวัดนครปฐม ถูกฆ่าตายในขณะนอนดูทีวีอยู่ในบ้านของตนเองเมื่อเวลา 20.00 น. ของวันพุธที่ 9 กันยายน 2535 หลังจากนั้นอีก 5 วันต่อมา มีชาย 5 คนถูกจับกุมและถูกสอบสวนเกี่ยวกับคดีนี้ คือ นายนิด นายโรจน์ นายชัย นายชาญ และนายเจิด จากหลักฐานต่างๆทำให้แน่ใจได้ว่า 1 ใน 5 คนนี้ต้องเป็นฆาตกรอย่างแน่นอน แต่ยังไม่ทราบว่าเป็นใคร เพราะถ้าคนเหล่านี้ให้การ 4 ประโยค เขาจะพูดจริงเพียง 3 ประโยคเท่านั้น จากคำให้การคนละ 4 ประโยคข้างล่างนี้ ท่านจงช่วยวิเคราะห์ด้วยว่าใครเป็นฆาตกรกันแน่

   นายนิด : ผมอยู่ที่ราชบุรีตอนกำนันถูกฆ่า ผมไม่เคยฆ่าใคร เจิดนั่นแหละเป็นคนฆ่า โรจน์ไม่เคยมีปืนเลย

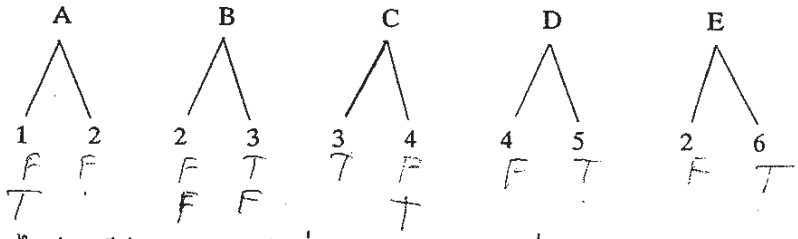
นายโรจน์ : ผมไม่ได้ฆ่ากำนัน ผมไม่เคยมีปืนเลย เจิดเห็นผมในคืนนั้นที่ราชบุรี เจิดไม่เคยไปสุพรรณ

นายชัย : โรจน์โกหกว่าไม่เคยมีปืน ผมเชื่อว่านิดอยู่ราชบุรีตอนกำนันถูกฆ่า 1 ใน 5 คนของพวกเรานี่แหละเป็นคนฆ่า แต่ผมไม่ได้ฆ่ากำนัน

นายชาญ : ผมไม่ได้ฆ่ากำนัน เจิดไม่เคยอยู่สุพรรณ ผมไม่เคยเห็นนิดมาก่อน ชัยอยู่กับผมคืนนั้นที่เพชรบุรี

นายเจิด : ผมไม่ได้ฆ่ากำนัน ผมไม่เคยอยู่สุพรรณ ผมไม่เคยเห็นโรจน์มาก่อน นิดโกหกหาว่าผมเป็นคนฆ่า

8. นักจัดรายการโทรทัศน์จัดรายการชิงโชครถยนต์ ให้ผู้ร่วมรายการเลือกกุญแจสำหรับเปิดประตูรถยนต์ 1 ดอกและสำหรับติดเครื่องยนต์อีก 1 ดอก โดยแขวนกุญแจหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ไว้เป็นคู่ๆ ดังนี้



และมีเงื่อนไขว่า มีคู่กุญแจ 4 คู่ ที่ประกอบด้วยกุญแจที่ใช้ได้และใช้ไม่ได้อย่างละหนึ่งดอก แต่มีอยู่คู่หนึ่งที่ประกอบด้วยกุญแจที่ใช้ไม่ได้ทั้งคู่ ถ้าผู้จัดรายการอนุญาตให้เลือกกุญแจได้ 2 คู่ ท่านคิดว่าผู้ร่วมรายการที่จะได้รถยนต์จะต้องเลือกกุญแจคู่ใดและกุญแจหมายเลขใดบ้างที่ใช้ได้

9. ถ้านายดำและนายแดงสนทนากันด้วยข้อความต่อไปนี้

นายดำ : จริงหรือเปล่าที่ว่าถ้าเธอชอบปุ๊กแล้วเธอต้องชอบปุ้ยด้วย

นายแดง : ถ้าฉันตอบว่า "จริง" แล้วฉันต้องชอบปุ๊ก

จากการสนทนานี้ท่านจะบอกได้หรือไม่ว่านายแดงชอบใคร

2 . 4 หลักขั้นพื้นฐานของตรรกศาสตร์

ข้อกำหนดที่สำคัญและเป็นพื้นฐานของตรรกศาสตร์ในขั้นต้นมีอยู่ด้วยกัน 2 ข้อคือ

1. "*สำหรับประพจน์ p ใดๆ p จะเป็นจริงหรือเป็นเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น*" ซึ่งทำให้เราได้ข้อความ "$p \vee \neg p$" เป็นจริงเสมอ เราจึงเรียกกฎข้อแรกนี้ว่า *Law of Exclude Middle* หรือ *Double Rule of Inference*

2. "*สำหรับประพจน์ p ใดๆ p จะเป็นจริงและเป็นเท็จพร้อมกันไม่ได้*" ซึ่งทำให้ข้อความ "$p \wedge \neg p$" เป็นเท็จเสมอและนั่นคือข้อความ "$\neg (p \wedge \neg p)$" เป็นจริงเสมอ กฎข้อที่สองนี้จึงมีชื่อเรียกกันว่า *กฎการตั้งข้อขัดแย้ง (Law of Contradiction)*

ข้อกำหนดขั้นพื้นฐานของตรรกศาสตร์ 2 ข้อข้างต้นนี้จะไม่ทำให้ข้อความขัดแย้งกันเป็นจริงพร้อมกันในระบบที่ใช้ตรรกศาสตร์ เราจึงเรียกระบบที่กำหนดหลักพื้นฐาน 2 ข้อนี้ว่า *ระบบความสอดคล้องกัน (consistency system)*

2 . 5 เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอ

พิจารณาข้อความ

"ถ้าดวงอาทิตย์ส่องแสง แล้วอากาศจะอบอุ่น"

เป็นข้อความที่แสดงให้เห็นว่า ถ้าเราแสดงให้เห็นได้ว่าขณะนี้ดวงอาทิตย์กำลังส่องแสงอยู่ เราจะสรุปได้ว่าอากาศขณะนั้นอบอุ่น หรือกล่าวได้ว่าในการที่จะพิสูจน์ว่าอากาศมีความอบอุ่นในขณะนั้น ก็เพียงแต่ หรือเพียงพอที่จะแสดงให้เห็นได้ว่าดวงอาทิตย์กำลังส่องแสง หรือนั่นคือ "ดวงอาทิตย์ส่องแสง" เป็น*เงื่อนไขเพียงพอ (sufficient condition)* ของ "อากาศอบอุ่น" แต่ในทางกลับกันเงื่อนไขที่จะทำให้อากาศอบอุ่นมีได้หลายอย่างแสดงว่า "อากาศอบอุ่น" ไม่เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า "ดวงอาทิตย์กำลังส่องแสง"

ขอให้สังเกตว่าเมื่อเรากล่าวว่า "ประพจน์ p เป็นเงื่อนไขเพียงพอของประพจน์ q" เราหมายถึงข้อความแจงเหตุสู่ผล "$p \rightarrow q$"

บทนิยาม 1 : เราจะเรียก "p" ของข้อความ "$p \rightarrow q$" ว่า *เงื่อนไขเพียงพอ* ของ q ก็ต่อเมื่อ q เป็นจริงในทุกกรณีที่ p เป็นจริง

และจะเรียกข้อความ "$p \rightarrow q$" ว่า *ความเป็นเงื่อนไข (implication)* ถ้า p เป็นเงื่อนไขเพียงพอของ q และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$p \Rightarrow q$"

จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าดวงอาทิตย์ส่องแสง แล้วอากาศจะไม่อบอุ่นไม่ได้ หรือถ้า p เป็นเงื่อนไขเพียงพอของ q แล้ว q จะเป็นเท็จไม่ได้ถ้า p เป็นจริง นั่นคือ q จำเป็นต้องเป็นจริงในทุกกรณีที่ p เป็นจริงเราจึงเรียก q ของความเป็นเงื่อนไขว่า *เงื่อนไขจำเป็น (neccessary condition)* ของ p

บทนิยาม 2 : p เป็น*เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอ (neccessary and sufficient condition)* ของ q ก็ต่อเมื่อ "$p \rightarrow q$" และ "$q \rightarrow p$" เป็นความเป็นเงื่อนไข

ข้อสังเกต : 1. ถ้า p เป็นเงื่อนไขเพียงพอของ q แล้ว q อาจไม่เป็นเงื่อนไขเพียงพอของ p เช่น

"เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมจตุรัสยาวเท่ากัน"
(สี่เหลี่ยมที่มีเส้นทะแยงมุมยาวเท่ากันอาจไม่ใช่สี่เหลี่ยมจตุรัส)

2. ถ้า q เป็นเงื่อนไขจำเป็นของ p แล้ว p จะเป็นเงื่อนไขเพียงพอของ q และโดยกลับกัน

3. ถ้า p เป็นเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของ q แล้วข้อความ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริงเสมอ หรือนั่นคือ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี และในกรณีเช่นนี้ เราจะเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย

"$p \Leftrightarrow q$"

แบบฝึกหัด 4

สำหรับแต่ละคู่ของ "สิ่ง" ในข้อต่อไปนี้ จงแสดงว่าสิ่งใดเป็นเงื่อนไขจำเป็น สิ่งใดเป็นเงื่อนไขเพียงพอของอีกสิ่งหนึ่ง พร้อมทั้งเขียนข้อความ "ความเป็นเงื่อนไข" ของแต่ละข้อ

1. สามเหลี่ยมด้านเท่า ; สามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2. สามเหลี่ยมด้านเท่า ; สามเหลี่ยมมุมเท่า

3. สี่เหลี่ยมด้านขนาน ; สี่เหลี่ยมจตุรัส

4. มุมฉาก ; สี่เหลี่ยมมุมฉาก

5. จำนวนเต็ม ; จำนวนตรรกยะ

6. จำนวนที่น้อยกว่า 5 ; จำนวนที่น้อยกว่า -2

7. จำนวนที่หารลงตัวด้วย 6 ; จำนวนที่หารลงตัวด้วย 2 และ 3

8. สัตว์สองเท้า ; นก

2 . 6 ข้อความสมมูลและสัจนิรันดร์

ข้อความบางข้อความมีค่าความจริงเป็นจริงในทุกกรณี เช่น $p \vee \neg p$ เราจึงเรียกข้อความลักษณะนี้ว่า *สัจนิรันดร์ (tautology)*

บทนิยาม 1 : *สัจนิรันดร์* คือข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริง โดยไม่ขึ้นกับกรณีของค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นส่วนประกอบ

ถ้า p เป็นสัจนิรันดร์ แล้วเราจะเขียนแทนความหมายนี้ด้วยสัญลักษณ์

$\models p$

ตัวอย่างเช่น

$\models \neg (p \wedge \neg p)$

$\models p \vee \neg p$

$\models [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

$\models [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

$\models p \rightarrow (p \vee q)$

$\models \neg (\neg p) \leftrightarrow p$

เป็นต้น

จากตารางค่าความจริงของข้อความ "$p \leftrightarrow q$" (ตาราง 5) แสดงว่าข้อความ "$p \leftrightarrow q$" เป็นจริงก็ต่อเมื่อประพจน์ p และประพจน์ q ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกัน หรือกล่าวอีก

อย่างหนึ่งว่า

"*ข้อความ* $p \leftrightarrow q$ *เป็นสัจนิรันดร์ ก็ต่อเมื่อ* p *และ* q *มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี*" และถ้าเป็นเช่นนี้เราจะเรียก p และ q ว่า *ข้อความสมมูล (equivalence)*

บทนิยาม 2 : เราจะกล่าวว่า ข้อความ p และ ข้อความ q เป็น *ข้อความสมมูล* หรือ p *สมมูลกับ* q และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$p \equiv q$ หรือ $p \Leftrightarrow q$

ถ้า p และ q มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

ตัวอย่างเช่น

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

เป็นต้น

แบบฝึกหัด 5

1. จงแสดงว่าข้อความในข้อต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

   1.1 $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

   1.2 $p \vee (\neg p)$

   1.3 $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

   1.4 $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

   1.5 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

   1.6 $[p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

   1.7 $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$

   1.8 $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)]$

2. จงพิจารณาว่าข้อความในข้อต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือข้อความเท็จทุกกรณี หรือไม่เป็นทั้งสองอย่าง

   2.1 $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \vee r)]$

2.2 $(p \wedge q) \wedge \neg (p \vee q)$

2.3 $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

3. จงแสดงว่าข้อต่อไปนี้เป็นจริง พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

3.1 บทกลับของข้อความแจงเหตุสู่ผลที่เป็นจริง อาจไม่เป็นจริง

3.2 ข้อความตรงข้ามของข้อความแจงเหตุสู่ผลที่เป็นจริง อาจไม่เป็นจริง

3.3 ข้อความตรงข้ามเป็นข้อความแย้งสลับที่ของบทกลับ

4. จงพิจารณาว่าคู่ของข้อความในข้อต่อไปนี้เป็นข้อความสมมูลกันหรือไม่

4.1 $p \wedge q$

$q \wedge p$

4.2 $p \vee q$

$q \vee p$

4.3 $\neg (r \rightarrow \neg s)$

$r \wedge s$

4.4 $p \rightarrow q$

$q \rightarrow p$

4.5 $p \wedge (p \rightarrow q)$

$p \wedge q$

4.6 $\neg (p \rightarrow \neg q)$

$p \wedge (p \rightarrow q)$

4.7 $(q \vee \neg p) \wedge r$

$(q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$

4.8 $[p \rightarrow (q \vee \neg q)] \vee w$

w

4.9 $(q \wedge \neg q) \wedge p$

p

4.10 $(p \wedge q) \rightarrow q$

$p \vee \neg q$

5. จงเขียนข้อความที่สมมูลกับข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้

5.1 ถ้านาย ก.ได้หมายเลขไม่ตรงกับรางวัล นาย ก. ก็จะไม่ใช่ผู้ชนะ

5.2 ฝนคงจะตกและเสบียงของเราก็จะสูญหายหรือถูกขโมยไป

5.3 เขาไม่ใช่พ่อของดำหรือแดง

5.4 ไม่เป็นความจริงที่ว่าดำมีพิรุธและแดงพูดเท็จ

5.5 ไม่เป็นความจริงที่ว่าฉันไม่มีความสุข

2 . 7 กฎการแทนที่

ในหัวข้อ 2.6 กล่าวไว้ว่าประพจน์ p สมมูลกับประพจน์ q ถ้า $p \Leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือนั่นคือ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี ซึ่งแสดงว่าถ้านำประพจน์ p เขียนลงแทนที่ประพจน์ q ในข้อความเชิงประกอบใดก็ตามที่ q เป็นส่วนประกอบ เราจะได้ข้อความเชิงประกอบที่สมมูลกับข้อความเชิงประกอบเดิม ทำให้เราสามารถเปลี่ยนรูปข้อความเชิงประกอบให้ดูง่ายขึ้น เช่นเมื่อเราทราบว่า

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ และ $p \vee \neg p$ เป็นสัจนิรันดร์

จะทำให้เราได้

$$p \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p)$$
$$\equiv p \vee q$$

เป็นต้น นอกจากนี้ยังช่วยในการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของตรรกบท ซึ่งเราจะศึกษากันต่อไปในหัวข้อ 2.8 จึงขอรวบรวมข้อความสมมูลกันที่สำคัญๆเข้าไว้เพื่อสะดวกในการค้นหาและนำไปใช้ และจะรวมเรียกว่า *กฎการแทนที่ (Rules of Replacement)*

กฎการแทนที่ (Rules of Replacement)

1. *กฎของเดอมอร์แกน De Morgan's Theorem (De.M.) :*

$$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

2. *กฎการสลับที่ Commutation (Com.) :*

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

3. *กฎการเปลี่ยนกลุ่ม Association (Assoc.) :*

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

4. *กฎการกระจาย* *Distribution (Dist.) :*

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

5. *กฎนิเสธซ้อน* *Double Negation (D.N.) :*

$$p \equiv \neg(\neg p) \quad (\equiv \neg\neg p)$$

6. *กฎการสลับเงื่อนไข* *Transposition (Trans.) :*

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

7. *กฎเปลี่ยนรูปเงื่อนไข* *Material Implication (Impl.) :*

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

8. *กฎเปลี่ยนรูปสมมูล* *Material Equivalence (Equiv.) :*

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

9. *กฎการส่งออก* *Exportation (Exp.) :*

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

10. *กฎสัจนิรันดร์* *Tautology (Taut.) :*

$$p \equiv p \vee p$$

$$p \equiv p \wedge p$$

แบบฝึกหัด 6

1. จงใช้กฎการแทนที่ในการแสดงว่า ข้อความในข้อต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

1.1 $[r \wedge (s \vee t)] \vee \neg [r \wedge (s \vee t)]$

1.2 $[(\neg t \rightarrow r) \wedge (\neg u \rightarrow s) \wedge (\neg t \vee \neg u)] \rightarrow (r \vee s)$

1.3 $\{[p \rightarrow \neg (t \wedge s)] \wedge [(\neg t \vee \neg s) \rightarrow r]\} \rightarrow (p \rightarrow r)$

1.4 $[(r \rightarrow s) \wedge (t \rightarrow w)] \rightarrow (\neg s \rightarrow \neg r)$

1.5 $\{[(r \rightarrow s) \wedge (r \rightarrow t)] \wedge [r \rightarrow (s \wedge t)] \rightarrow q\} \rightarrow q$

1.6 $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q) \wedge (\neg r)] \rightarrow \neg p$

2. จงใช้กฎการแทนที่ ทำให้ข้อความในข้อต่อไปนี้อยู่ในรูปง่ายที่สุด

2.1 $\neg [p \vee \neg (q \wedge r)]$

2.2 $p \wedge (\neg p \vee q)$

2.3 $p \vee [\neg p \vee (q \wedge \neg q)]$

2.4 $[(\neg r \wedge \neg s) \vee \neg (r \vee s)] \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$

2.5 $[p \wedge (q \wedge s)] \vee [\neg p \wedge (q \wedge s)]$

2.6 $w \wedge s \wedge [\neg \{(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)\} \rightarrow r]$

2.8 ตรรกบทกับความสมเหตุสมผล

ดังที่ได้กล่าวแล้วว่า ตรรกศาสตร์คือศาสตร์แห่งการแสดงเหตุผล จนทำให้สามารถบอกข้อสรุปได้ถูกต้อง จากกลุ่มของข้อความที่เราสมมติขึ้นหรือกำหนดให้เป็นจริง และแม้ผู้ที่สามารถบอกข้อสรุปได้จะมิใช่เพียงผู้ที่เคยศึกษาตรรกศาสตร์มาแล้วเท่านั้นก็ตาม แต่การศึกษาตรรกศาสตร์จะทำให้สามารถชี้ความแตกต่างของการสรุปถูก และ/หรือสรุปผิดได้ ดังนั้นจะไม่อาจกล่าวได้ว่าเรากำลังศึกษาตรรกศาสตร์ ถ้าไม่ได้กล่าวถึงกระบวนการของการใช้เหตุผล หรือทำการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ในหัวข้อนี้จึงขอเริ่มกระบวนการดังกล่าวด้วยการให้นิยามตรรกบทหรือข้อโต้แย้ง ตลอดจนชี้ให้เห็นความแตกต่างของตรรกบทที่สมเหตุสมผล และตรรกบทที่ไม่สมเหตุสมผล

พิจารณาข้อความแจงเหตุสู่ผล

(ก) "ถ้าฉันพลาดรถไฟขบวนนี้ ฉันจะไปไม่ทันการประชุม"

จะเห็นว่าแม้ว่าเราจะกำหนดให้ข้อความนี้เป็นจริงก็ตาม ก็ไม่อาจบอกได้ว่า "ฉันพลาดรถไฟ" หรือ "ฉันไปทันการประชุม" หรือไม่ แต่ถ้าทราบว่า

(ข) "ฉันพลาดรถไฟขบวนนี้"

จะบอกได้ทันทีว่า

(ค) "ฉันไปไม่ทันการประชุม"

และไม่ว่าเราจะเปลี่ยนข้อความ (ก), (ข) และ(ค) ข้างต้นไปด้วยข้อความใดก็ตาม เราจะสรุปได้ (ค) ของข้อความที่เปลี่ยนไปนั้นๆได้เสมอ ทั้งนี้เพราะขั้นตอนการให้เหตุผล หรือการ

สรุปผลจากเหตุในลักษณะนี้สอดคล้องกับสามัญสำนึก และก็ตรงกับตารางค่าความจริงของข้อความในรูปสัญลักษณ์ "$p \rightarrow q$" ในกรณีที่ "$p \rightarrow q$" เป็นจริง และ p ก็เป็นจริงด้วย เราจึงกำหนดให้ลักษณะการสรุปผลจากเหตุ

"*ข้อความแจงเหตุสู่ผล* "$p \rightarrow q$" *และสมมติฐาน* p *นำไปสู่ผลคือ ข้อสรุป* q" เป็นหลักเกณฑ์ขั้นมูลฐานหลักที่หนึ่งของตรรกศาสตร์ และให้มีชื่อเรียกว่า *กฎการแจงผลตามเหตุ (Modus Ponens)*

Modus Ponens (M.P.) : *เนื่องจากข้อความ* "$p \rightarrow q$" *และ* p *เป็นจริง เพราะฉะนั้นประพจน์* q *ต้องถูกยอมรับว่าเป็นจริงด้วย*

เราอาจเขียน "รูปแบบ" (form) หรือ "แบบอย่าง" (pattern) ของกฎการแจงผลตามเหตุได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

โดยที่สัญลักษณ์ $\therefore$ แทนคำว่า "เพราะฉะนั้น" หรือ "ดังนั้น"

แบบอย่างการเขียนในลักษณะแจกแจงจากเหตุไปสู่ผลสรุป ดังเช่นรูปแบบของกฎการแจงผลตามเหตุ ถูกเรียกว่า *ตรรกบท (syllogism)* หรือ *โครงสร้างข้อโต้แย้ง (argument structure)* โดยที่แต่ละประพจน์ที่อยู่เหนือเส้นที่ขีดไว้มีชื่อเรียกว่า "*ข้อกำหนด(premises)*" หรือ" *สมมติฐาน (assumptions)*" ในขณะที่ข้อความใต้เส้นมีชื่อเรียกว่า "*ข้อสรุป (conclusion)*"

แบบอย่างตรรกบทจะไม่ขึ้นกับลำดับของการเขียนข้อกำหนด ดังนั้นแบบอย่างของกฎการแจงผลตามเหตุ จึงอาจเขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

บทนิยาม 1 : กลุ่มของข้อความที่ประกอบด้วยข้อความต่างๆที่เราสมมติหรือกำหนดให้เป็นจริงส่วนหนึ่ง ซึ่งจะรวมเรียกว่า "*กลุ่มของข้อกำหนด (premises)*" กับข้อความที่เป็น "*ข้อสรุป (conclusion)*" อีกส่วนหนึ่ง รวมกันเรียกว่า *ตรรกบท* หรือ *ข้อโต้แย้ง*

พิจารณาตรรกบทต่อไปนี้

ตรรกบท 1 : 1. ถ้าฉันได้เป็นนายกรัฐมนตรี ฉันจะเป็นที่รู้จักของคนทั่วไป
2. ฉันไม่ได้เป็นนายกรัฐมนตรี
---
3. ดังนั้นฉันไม่เป็นที่รู้จักของคนทั่วไป

ตรรกบท 2 : 1. ถ้าพระพยอมได้เป็นนายกรัฐมนตรี พระพยอมจะเป็นที่รู้จักของคนทั่วไป
2. พระพยอมไม่ได้เป็นนายกรัฐมนตรี
---
3. ดังนั้นพระพยอมไม่เป็นที่รู้จักของคนทั่วไป

สังเกตว่าเรายอมรับข้อสรุปของตรรกบท 1 ได้ ในขณะที่เราไม่อาจยอมรับข้อสรุปของตรรกบท 2 ทั้งๆที่ตรรกบททั้งสองได้ข้อสรุปจากข้อกำหนดในรูปแบบอย่างเดียวกัน เราจึงจะกล่าวว่าตรรกบทในรูปแบบนี้ไม่สมเหตุสมผล

บทนิยาม 2 : *ตรรกบทที่ไม่สมเหตุสมผล (invalid argument)* คือ ตรรกบทที่เราสามารถสร้างตัวอย่างซึ่งทำให้ตรรกบทรูปแบบเดียวกันนี้ประกอบด้วยกลุ่มของข้อกำหนดที่เป็นจริงทั้งหมด แต่ข้อสรุปเป็นเท็จได้

เพราะฉะนั้น

ตรรกบท 3 : 1. $p \rightarrow q$
2. $\neg p$
---
3. $\therefore \neg q$

เป็นรูปแบบของตรรกบทที่ไม่สมเหตุสมผล เนื่องจากเรามีตรรกบท 2 เป็นตัวอย่างของตรรกบทรูปแบบดังกล่าวที่มีข้อกำหนดเป็นจริงทั้งหมด แต่ข้อสรุปเป็นเท็จ.

จากตรรกบท 1 และตรรกบท 2 ข้างต้น แสดงให้เห็นว่า *ความสมเหตุสมผล (validity)* ของตรรกบทไม่ได้ขึ้นอยู่กับความหมายของข้อความที่ประกอบกันขึ้นเป็นตรรกบท แต่ขึ้นอยู่กับรูปแบบของตรรกบท ดังนั้นการศึกษาความสมเหตุสมผลของตรรกบทจึงศึกษากันในลักษณะของรูปแบบตรรกบทสัญลักษณ์ กล่าวคือให้ p, q, r, s, t, . . . เป็นข้อความที่เป็นตัวแปรหรือสามารถแทนได้ด้วยข้อความใดก็ได้ เป็นกลุ่มของข้อกำหนดและบทสรุปของตรรกบท แล้วเราจะพิจารณาว่ารูปแบบใดของตรรกบทจึงจะเป็นตรรกบทที่สมเหตุสมผล

นอกจากนี้ความสมเหตุสมผลของตรรกบทยังไม่ขึ้นกับค่าความจริงของข้อความในตรรกบท หากขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของค่าความจริงของข้อความในข้อกำหนดกับข้อสรุป บางตรรกบทที่ไม่สมเหตุสมผลอาจประกอบด้วยข้อความในข้อกำหนดที่เป็นจริงทั้งหมด และข้อสรุปก็เป็นจริงด้วย เช่น ตรรกบท 1 หรือ บางตรรกบทที่สมเหตุสมผลอาจประกอบด้วยข้อความที่เป็นเท็จทั้งหมด เช่น

ตรรกบท 4 : 1. ปลาเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม (เป็นเท็จ)
2. สัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมเป็นสัตว์ปีก (เป็นเท็จ)
3. ดังนั้นปลาเป็นสัตว์ปีก (เป็นเท็จ)

ในขณะที่บางตรรกบทที่สมเหตุสมผลอาจประกอบด้วยข้อสรุปที่เป็นจริง แต่บางข้อความในข้อกำหนดอาจเป็นเท็จได้ ตัวอย่างเช่น

ตรรกบท 5 : 1. ดอกไม้ทุกชนิดมีกลิ่นหอม (เป็นเท็จ)
2. กุหลาบเป็นดอกไม้ (เป็นจริง)
3. เพราะฉะนั้นกุหลาบมีกลิ่นหอม (เป็นจริง)

บทนิยาม 3 : *ตรรกบทที่สมเหตุสมผล (valid argument)* คือตรรกบทที่ไม่เป็นตรรกบทไม่สมเหตุสมผล

ตรรกบทที่สมเหตุสมผล คือตรรกบทที่เราไม่สามารถสร้างตัวอย่างในรูปแบบของตรรกบทนั้นแล้วได้กลุ่มของข้อกำหนดเป็นจริงทั้งหมด แต่ได้ข้อสรุปเป็นเท็จ กล่าวคือ ถ้าตรรกบทใดสมเหตุสมผล และประกอบด้วยข้อกำหนดที่เป็นจริงทั้งหมดแล้วจะต้องได้ข้อสรุปที่เป็นจริงด้วย ดังนั้นการทดสอบความสมเหตุสมผลของตรรกบทจึงกระทำได้ด้วยการสร้างตารางค่าความจริง หากรณีที่จะทำให้ได้ความไม่สมเหตุสมผล และถ้าไม่มีกรณีที่จะทำให้ได้ตัวอย่างของความไม่สมเหตุสมผล เราจะสรุปว่าตรรกบทนั้นสมเหตุสมผล ตัวอย่างเช่น

ตรรกบท 6 : 1. $p \vee q$

2. $\neg p$

3. $\therefore q$

เราสร้างตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \vee q$	$\neg p$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

ตาราง 9

กรณีที่ข้อกำหนดเป็นจริงทั้งหมดอยู่ที่บรรทัด 3 ของตารางเท่านั้น และให้ข้อสรุปเป็นจริงด้วยจึงได้ว่าตรรกบทรูปแบบนี้สมเหตุสมผล แต่สำหรับตรรกบท 3 ซึ่งมีตารางค่าความจริงดังตาราง 10 ข้างล่างนี้

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

ตาราง 10

เราได้กรณีที่จะทำให้ข้อกำหนดเป็นจริงทั้งหมดอยู่บรรทัดที่ 3 และบรรทัดที่ 4 และในกรณีของบรรทัดที่ 3 เป็นตัวอย่างที่จะได้ข้อสรุปเป็นเท็จ เราจึงกล่าวได้ว่าตรรกบทรูปแบบนี้ไม่สมเหตุ สมผล

อย่างไรก็ตามเราอาจสร้างตารางค่าความจริงบรรทัดเดียวให้กับการสมมติว่าตรรกบทที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นไม่สมเหตุสมผล นั่นคือพยายามสร้างตารางกรณีที่ข้อกำหนดเป็นจริงทั้งหมด แต่ข้อสรุปเป็นเท็จ ซึ่งถ้าสามารถสร้างได้ เราก็จะสรุปได้ว่าตรรกบทนั้นไม่สมเหตุสมผล

ตรรกบท 7 : 1. $V \rightarrow O$

2. $H \rightarrow O$

---

3. $\therefore$ $V \rightarrow H$

ในการสร้างตารางค่าความจริงบรรทัดเดียว เราต้องการให้ได้แผนภาพ

$V \rightarrow O$	$H \rightarrow O$	$V \rightarrow H$
T	T	F

ซึ่งจะทำให้เราได้แผนภาพแสดงค่าความจริงของ V, H และ O ดังนี้

$V \rightarrow H$	$H \rightarrow O$	$V \rightarrow O$
T F	F T	T T
F	T	T

แสดงว่าเราสร้างตารางค่าความจริงบรรทัดเดียวได้ดังนี้

V	O	H	V→ O	H→ O	V→ H
T	T	F	T	T	F

เพราะฉะนั้นตรรกบทรูปแบบนี้ ไม่สมเหตุสมผล

แบบฝึกหัด 7

1. จงทดสอบว่าตรรกบทต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

1.1 $p \rightarrow q$
p
$\therefore q$

1.2 $p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
$\therefore p \rightarrow r$

1.3 $p \rightarrow q$
$\neg q$
$\therefore \neg p$

1.4 $p \vee q$
$\neg p$
$\therefore q$

1.5 $p \wedge q$
$\therefore p$

1.6 p
$\therefore p \vee q$

1.7 $p \vee q$
$\therefore p$

1.8 p
$\therefore p \rightarrow q$

1.9 p
$\therefore p \wedge q$

1.10 $p \rightarrow q$
$\therefore \neg p \rightarrow \neg q$

1.11 $p \rightarrow q$
q
$\therefore p$

1.12 $p \rightarrow q$
$\neg p$
$\therefore q$

1.13 $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
$p \vee r$
$\therefore q \vee s$

1.14 $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
$\neg q \vee \neg s$
$\therefore \neg p \vee \neg r$

1.15 ถ้าวันนี้เป็นวันจันทร์แล้วเมื่อวานนี้จะเป็นวันอาทิตย์ เมื่อวานนี้เป็นวันอาทิตย์ ดังนั้น วันนี้คือวันจันทร์

1.16 ถ้าฉันตั้งใจเรียนแล้วฉันจะนอนหลับ แต่ถ้าฉันมีเรื่องกังวลใจแล้วฉันจะนอนไม่หลับ ดังนั้นถ้าฉันไม่ตั้งใจเรียนแล้วฉันจะมีเรื่องกังวลใจ

1.17 ฉันจะปวดศีรษะเสมอถ้าอากาศร้อน ฉันทานยาแก้ปวดเมื่อใดก็ตามที่ฉันปวดศีรษะ ฉันดื่มน้ำทุกครั้งเมื่อทานยา ดังนั้นฉันดื่มน้ำทุกครั้งที่ปวดศีรษะ

2. ข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

2.1 ตรรกบทที่ประกอบด้วยข้อสรุปที่เป็นเท็จ จะไม่สมเหตุสมผล

2.2 ตรรกบทที่ประกอบด้วยข้อกำหนดที่เป็นเท็จทั้งหมด จะสมเหตุสมผลเสมอ ทั้งนี้เพราะข้อกำหนดจะเป็นจริงไม่ได้ถ้าบทสรุปเป็นเท็จ

2.3 ถ้าตรรกบทอยู่ในรูปแบบไม่สมเหตุสมผล แล้วไม่ว่าจะแทนตรรกบทนั้นด้วยตัวอย่างใดจะได้ตรรกบทไม่สมเหตุสมผลเสมอ

2.4 ถ้าตรรกบทอยู่ในรูปแบบสมเหตุสมผล แล้วไม่ว่าจะแทนตรรกบทนั้นด้วยตัวอย่างใดจะได้ตรรกบทที่สมเหตุสมผลเสมอ

3. จงแสดงว่าตรรกบทในข้อต่อไปนี้ อยู่ในรูปแบบที่ไม่สมเหตุสมผล

3.1
$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ B \vee C \\ \hline \therefore\ A \vee D \end{array}$$

3.2
$$\begin{array}{l} E \rightarrow (F \vee G) \\ G \rightarrow (H \wedge I) \\ \neg H \\ \hline \therefore\ F \rightarrow E \end{array}$$

3.3
$$\begin{array}{l} J \rightarrow (K \rightarrow L) \\ K \rightarrow (\neg L \rightarrow M) \\ (L \vee M) \rightarrow N \\ \hline \therefore\ J \rightarrow N \end{array}$$

3.4
$$\begin{array}{l} T \leftrightarrow U \\ U \leftrightarrow (V \wedge W) \\ V \leftrightarrow (T \vee X) \\ T \vee X \\ \hline \therefore\ T \wedge X \end{array}$$

3.5 สามเหลี่ยมที่ได้มาเป็นสามเหลี่ยมคล้าย ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่สมนัยกันเท่ากันมุมต่อมุมแล้วสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้นสามเหลี่ยมที่ได้มามีมุมที่สมนัยกันเท่ากันมุมต่อมุม

2 . 9 การอ้างอิง

แม้ว่าการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของตรรกบทจะกระทำได้โดยการสร้างตารางค่าความจริงดังกล่าวแล้วในหัวข้อก่อน แต่หากว่าตรรกบทใดประกอบด้วยข้อกำหนดหลายข้อความ และแต่ละข้อความประกอบด้วยประพจน์เชิงเดียวหลายประพจน์ การตรวจสอบด้วยตารางค่าความจริงจะไม่สะดวกและอาจเสียเวลามาก อีกวิธีการทดสอบหนึ่งที่เป็นไปได้คือแยก

แยะกลุ่มข้อกำหนดออกเป็นตรรกบทย่อยๆในรูปแบบของตรรกบทง่ายๆที่ทราบมาก่อนแล้วว่าสมเหตุสมผล และเมื่อได้ข้อสรุปแล้วก็นำไปรวมกับข้อกำหนดอื่นๆให้อยู่ในรูปแบบของตรรกบทที่ทราบแล้วว่าสมเหตุสมผลต่อไปเรื่อยๆเป็นลำดับจำกัดแบบลูกโซ่ จนกระทั่งได้ข้อสรุปสุดท้ายเป็นข้อสรุปของตรรกบทที่ต้องการทดสอบความสมเหตุสมผล วิธีการอย่างหลังดังที่กล่าวนี้ เรียกกันว่า *การพิสูจน์ข้อโต้แย้ง* หรือ *การพิสูจน์ตรรกบท* แต่ก่อนจะนำวิธีการนี้ไปใช้พิสูจน์ตรรกบทต่างๆ เราควรรวบรวมตรรกบทที่สมเหตุสมผลไว้เป็นกฎเพื่อการอ้างอิงต่อไป ซึ่งโดยมากจะเป็นกฎหรือตรรกบทที่ได้จากสัจนิรันดร์ และการขยายตรรกบทที่เป็นกฎอยู่เดิม ตัวอย่างเช่น เพราะว่า

$$p \rightarrow q \quad \equiv \quad \neg q \rightarrow \neg p$$

ดังนั้นโดยกฎการแจงผลตามเหตุ (M.P.) เราจะได้ตรรกบท

$$\begin{array}{l} \neg q \rightarrow \neg p \\ \neg q \\ \hline \therefore \ \neg p \end{array} \qquad \text{ซึ่งก็คือตรรกบท} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \ \neg p \end{array}$$

ซึ่งเป็นตรรกบทที่สมเหตุสมผล เราจึงเรียกตรรกบทสุดท้ายนี้ว่า *กฎการแจงผลค้านเหตุ (Modus Tollens)*

หรือจากสัจนิรันดร์ "$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$" กับกฎการแจงผลค้านเหตุ เราจะได้ตรรกบท

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \ \neg(\neg p) \equiv p \end{array} \qquad \text{ทำให้ได้ตรรกบท} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore \ p \end{array}$$

ซึ่งเราจะเรียกว่า *ตรรกบทแบบคัดออก (Disjunctive Syllogism)*

สมมติเราให้ p เป็นประพจน์ที่เป็นจริง ดังนั้นโดยกฎการแจงผลตามเหตุ เมื่อพิจารณา p ร่วมกับ "$p \rightarrow q$" จะได้ข้อสรุป q เป็นจริง ซึ่งเมื่อนำไปพิจารณาร่วมกับ "$q \rightarrow r$" โดยกฎการแจงผลตามเหตุอีกครั้งจะได้ข้อสรุป r เป็นจริง แต่ r เป็นจริงภายใต้สมมติฐาน p เป็นจริง ดังนั้น "$p \rightarrow r$" เป็นจริง ทำให้เราได้ตรรกบทต่อไปนี้สมเหตุสมผลคือ

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore \ p \rightarrow r \end{array}$$

และเนื่องจากเหตุที่มาของตรรกบท เราจึงให้ชื่อตรรกบทนี้ว่า *ตรรกบทแบบสมมติฐาน (Hypothetical Syllogism)*

หมายเหตุ : ด้วยวิธีการเดียวกันกับที่มาของตรรกบทแบบสมมติฐาน ถ้าเรากระทำเป็นลำดับจำกัด n ครั้ง เราจะได้ตรรกบทที่สมเหตุสมผลต่อไปนี้

$$\begin{array}{l} r_0 \rightarrow r_1 \\ r_1 \rightarrow r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \rightarrow r_n \\ \hline \therefore\ r_0 \rightarrow r_n \end{array}$$

พิจารณาตารางค่าความจริงของข้อความ "$p \wedge q$" และ "$p \vee q$" ทำให้ได้ว่า

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore\ p \wedge q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$

ต่างเป็นตรรกบทที่สมเหตุสมผล ซึ่งเราจะเรียกชื่อตามลำดับว่า *กฎการเปลี่ยนให้ง่าย (Simplification)* *กฎรวมความ (Conjunction)* และ *กฎการเพิ่ม (Addition)*

กฎการอ้างอิง (Inference Rules)

1. *กฎการแจงผลตามเหตุ : ModusPonens (M.P.)*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

2. *กฎการแจงผลค้านเหตุ : Modus Tollens (M.T.)*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \quad \neg p \end{array}$$

3. *ตรรกบทแบบสมมติฐาน : Hypothetical Syllogism (H.S.)*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore \quad p \rightarrow r \end{array}$$

4. *ตรรกบทแบบคัดออก : Disjunctive Syllogism (D.S.)*

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

5. *การเลือกผลเสริมตามเหตุ : Constructive Dilemma (C.D.)*

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ p \vee r \\ \hline \therefore \quad q \vee s \end{array}$$

6. *การเลือกปฏิเสธผลตามเหตุ : Destructive Dilemma (D.D.)*

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore \quad \neg p \vee \neg r \end{array}$$

7. *กฎเปลี่ยนให้ง่าย : Simplification (Simp.)*

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

8. *กฎรวมความ : Conjunction (Conj.)*

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore \quad p \wedge q \end{array}$$

9. *กฎการเพิ่ม : Addition (Add.)*

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

ต่อไปเราจะนำตรรกบทที่เราได้แสดงไว้ข้างต้นแล้วว่าสมเหตุสมผลมาใช้อ้างอิง เพื่อพิสูจน์ตรรกบทต่อไปนี้

$$\frac{\begin{array}{l}(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)\\ p \vee r\end{array}}{\therefore\ q \vee s}$$

จากข้อกำหนด "$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$" โดยกฎเปลี่ยนให้ง่ายจะได้ "$p \rightarrow q$" ซึ่งเมื่อพิจารณาร่วมกับ "$\neg r \rightarrow p \quad (\equiv r \vee p)$" โดยตรรกบทแบบสมมติฐานทำให้เราได้ข้อสรุปเป็น "$\neg r \rightarrow q$" ซึ่งเมื่อพิจารณาร่วมกับ $\neg s \rightarrow \neg r \quad (\equiv r \rightarrow s)$ ซึ่งได้มาโดยกฎเปลี่ยนให้ง่ายกับข้อความ "$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$" อีกครั้ง จะได้ข้อสรุป $\neg s \rightarrow q \equiv q \vee s$ ตามต้องการ

สังเกตว่าการแสดงความสมเหตุสมผลของตรรกบทโดยวิธีพิสูจน์ตรรกบท แม้ว่าจะไม่ยากและไม่เสียเวลามาก แต่เมื่อต้องอธิบายให้ทราบเหตุผลของการสรุปแต่ละขั้นตอนดังตัวอย่างข้างต้นอาจทำให้สับสนและเห็นไม่ชัด เราจึงคิดวิธีเขียนการพิสูจน์ตรรกบทให้ดูเข้าใจง่าย ด้วยการเรียงและใส่ตัวเลขกำกับแต่ละข้อความในขั้นตอนการพิสูจน์ โดยเริ่มจากข้อกำหนด และเมื่อถึงแต่ละข้อสรุปที่ได้จากข้อกำหนดกับกฎใดเราจะเขียนกฎการสรุปนั้นไว้ในวงเล็บเล็กท้ายข้อสรุปนั้นๆดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตรรกบท 1 :

1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
2. $\neg q \vee \neg s \quad / \therefore \quad \neg p \vee \neg r$
3. $p \rightarrow q$ (1, Simp.)
4. $r \rightarrow s$ (1, Simp.)
5. $\neg s \rightarrow \neg r$ (4, Trans.)

6. $q \rightarrow \neg s$ (2, Impl.)

7. $p \rightarrow \neg r$ (3, 6, 5, H.S.)

8. $\neg p \vee \neg r$ (7, Impl.)

ตรรกบท 2 :

1. $\neg A$ / $\therefore A \rightarrow B$

2. $\neg A \vee B$ (1, Add.)

3. $A \rightarrow B$ (2, Impl.)

ตรรกบท 3 :

1. $A \rightarrow \neg (B \rightarrow C)$

2. $D \wedge B \rightarrow C$

3. D / $\therefore \neg A$

4. $D \rightarrow (B \rightarrow C)$ (2, Exp.)

5. $B \rightarrow C$ (3, 4, M.P.)

6. $\neg A$ (1, 5, M.T.)

ตรรกบท 4 :

1. $K \rightarrow L$ / $\therefore K \rightarrow (L \vee M)$

2. $\neg K \vee L$ (1, Impl.)

3. $(\neg K \vee L) \vee M$ (2, Add.)

4. $\neg K \vee (L \vee M)$ (3, Asso.)

5. $K \rightarrow L \vee M$ (4, Impl.)

ตรรกบท 5 :

1. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

2. $\neg C$ / $\therefore \neg B$

3. $\neg C \vee \neg D$ (2, Add.)

4. $\neg (C \wedge D)$ (3, De.M.)

5. $\neg (A \vee B)$ (1, 4, M.T.)

6. $\neg A \wedge \neg B$ (5, De.M.)

7. $\neg B$ (6, Simp.)

แบบฝึกหัด 8

จงแสดงว่าตรรกบทที่สมเหตุสมผลในข้อต่อไปนี้ อยู่ในรูปแบบของกฎอ้างอิงใด

1.
$$\begin{array}{l} r \rightarrow s \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} \neg q \\ \hline \therefore \neg (p \wedge q) \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} r \rightarrow s \\ p \rightarrow q \\ r \vee p \\ \hline \therefore s \vee q \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \hline \therefore p \rightarrow s \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg C \rightarrow D) \\ \hline \therefore A \rightarrow \neg B \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} (F \rightarrow \neg G) \rightarrow (\neg H \vee \neg I) \\ F \rightarrow \neg G \\ \hline \therefore \neg H \vee \neg I \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l} E \rightarrow \neg F \\ \hline \therefore (E \rightarrow \neg F) \vee (\neg G \rightarrow H) \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} O \rightarrow \neg P \\ \neg P \rightarrow Q \\ \hline \therefore (O \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} [\neg (J \vee K) \rightarrow \neg L] \wedge (M \rightarrow \neg N) \\ \neg (J \wedge K) \vee M \\ \hline \therefore \neg L \vee \neg N \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l} (V \rightarrow W) \vee (X \rightarrow Y) \\ \neg (V \rightarrow W) \\ \hline \therefore X \rightarrow Y \end{array}$$

11. $(A \rightarrow \neg B) \wedge [C \rightarrow (D \wedge E)]$

$B \vee \neg (D \wedge E)$

$\therefore \neg A \vee \neg C$

12. ถ้าถ้วยทำด้วยทองคำแล้วถ้วยจะลอยน้ำได้

เด็กหญิงนิดยกถ้วยที่ลอยน้ำได้ทุกใบ

ดังนั้นเด็กหญิงนิดยกถ้วยที่ทำด้วยทองคำได้ทุกใบ

13. ถ้าฉันตั้งใจเรียนแล้วฉันจะนอนหลับ

ถ้าฉันมีเรื่องกังวลใจแล้วฉันจะนอนไม่หลับ

เพราะฉะนั้นถ้าฉันตั้งใจเรียนแล้วฉันไม่มีเรื่องกังวลใจ

14. เขาตายเพราะถูกฆ่า

ถึงเขาไม่ถูกฆ่าเขาก็ตายเหมือนกัน

เพราะฉะนั้นเขาต้องตายแน่ๆ

15. ข้อ 1.17 แบบฝึกหัด 7

2 . 10 การพิสูจน์ข้อโต้แย้ง

การอนุมาน (inference) เราหมายถึงข้อความแจงเหตุสู่ผลที่มีสมมติฐานคือ ข้อความร่วมของข้อกำหนด และข้อยุติ คือข้อสรุปของตรรกบทหนึ่ง หรือนั่นคือข้อความในรูป

(ข้อความร่วมของข้อกำหนดทั้งหลาย) → ข้อสรุป

เช่น กฎการแจงผลตามเหตุ กฎการแจงผลค้านเหตุ ตรรกบทแบบคัดออก ทำให้ได้การอนุมานตามลำดับต่อไปนี้

$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

$[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

การอนุมานเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้น คือสมมติฐานหรือข้อกำหนดทั้งหมดเป็นจริง แต่ข้อสรุปเป็นเท็จ ดังนั้นการอนุมานเป็นเท็จก็ต่อเมื่อตรรกบทที่สอดคล้องกับการอนุมานนั้นไม่สมเหตุสมผล

บทนิยาม 1 : เราจะเรียกการอนุมานหนึ่งว่า *การอนุมานสมเหตุสมผล (valid inference)* ถ้าการอนุมานนั้นเป็นสัจนิรันดร์ และจะกล่าวว่า *การอนุมานไม่สมเหตุสมผล (invalid inference)* ถ้ามีกรณีที่ทำให้การอนุมานนั้นเป็นเท็จ

เราสามารถเขียนข้อความแจงเหตุสู่ผล "$p \rightarrow q$" ในรูปตรรกบท

$$\frac{p}{\therefore\ q}$$

ที่ทำให้ได้ "$p \rightarrow q$" เป็นการอนุมาน เราจึงอาจกล่าวได้ว่าการอนุมานทำให้เกิดตรรกบทและตรรกบททำให้เกิดการอนุมาน ดังนั้นการแสดงความสมเหตุสมผลของการอนุมานก็คือการแสดงความสมเหตุสมผลของตรรกบทและโดยกลับกัน ซึ่งวิธีหนึ่งก็คือการพิสูจน์ข้อโต้แย้งดังกล่าวแล้วในหัวข้อ 2.9 อย่างไรก็ตามการพัฒนาวิธีการไปสู่ขั้นตอนที่ง่ายกว่าและสะดวกกว่าเป็นวิสัยของมนุษยชาติ ในหัวข้อนี้เราจึงจะจำแนกวิธีการพิสูจน์ข้อโต้แย้งตามลักษณะวิธีการที่จะทำให้ได้ข้อสรุปดังต่อไปนี้

1. การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof)

การพิสูจน์วิธีนี้ก็คือการพิสูจน์ข้อโต้แย้ง ซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อการอ้างอิง จึงจะขอยกตัวอย่างแสดงวิธีการดังต่อไปนี้

ตรรกบท 1 :

1. $A \rightarrow B$
2. $C \rightarrow D$
3. $(\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ $\quad / \therefore \neg A \vee \neg C$
4. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$ (1, 2, Conj.)
5. $\neg B \vee \neg D$ (3, Simp.)
6. $\neg A \vee \neg C$ (4, 5, D.D.)

ตรรกบท 2 :

1. $(R \rightarrow \neg S) \wedge (T \rightarrow \neg U)$
2. $(V \rightarrow \neg W) \wedge (X \rightarrow \neg Y)$
3. $(T \rightarrow W) \wedge (U \rightarrow S)$
4. $V \vee R$ $\quad / \therefore \neg T \vee \neg U$
5. $R \rightarrow \neg S$ (1, Simp.)
6. $V \rightarrow \neg W$ (2, Simp.)
7. $(R \rightarrow \neg S) \wedge (V \rightarrow \neg W)$ (5, 6, Conj.)
8. $\neg S \vee \neg W$ (4, 7, C.D.)
9. $\neg T \vee \neg U$ (3, 8, D.D.)

ตรรกบท 3 :

1. $(\neg X \vee \neg Y) \rightarrow [A \rightarrow (P \wedge \neg Q)]$
2. $(\neg X \wedge \neg R) \rightarrow [(P \wedge \neg Q) \rightarrow Z]$
3. $(\neg X \wedge \neg R) \wedge (\neg Z \vee A)$ $\quad / \therefore A \rightarrow Z$

4. $\neg X \wedge \neg R$ (3, Simp.)

5. $(P \wedge \neg Q) \rightarrow Z$ (2, 4, M.P.)

6. $\neg X$ (4, Simp.)

7. $\neg X \vee \neg Y$ (6, Add.)

8. $A \rightarrow (P \wedge \neg Q)$ (1, 7, M.P.)

9. $A \rightarrow Z$ (5, 8 H.S.)

ตรรกบท 4 :

1. $H \rightarrow (I \rightarrow J)$

2. $K \rightarrow (I \rightarrow J)$

3. $(\neg H \wedge \neg K) \rightarrow (\neg L \vee \neg M)$

4. $(\neg L \rightarrow \neg N) \wedge (\neg M \rightarrow \neg O)$

5. $(P \rightarrow N) \wedge (Q \rightarrow O)$

6. $\neg (I \rightarrow J)$ / $\therefore \neg P \vee \neg Q$

7. $\neg H$ (1, 6, M.T.)

8. $\neg K$ (2, 6, M.T.)

9. $\neg H \wedge \neg K$ (7, 8, Conj.)

10. $\neg L \vee \neg M$ (3, 9, M.P.)

11. $\neg N \vee \neg O$ (4, 10, C.D.)

12. $\neg P \vee \neg Q$ (5, 11, D.D.)

ตรรกบท 5 :

1. $(A \wedge B) \rightarrow [A \rightarrow (D \wedge E)]$

2. $(A \wedge B) \wedge C$ / $\therefore D \vee E$

3. $A \wedge B$ (2, Simp.)

4. $A \rightarrow D \wedge E$ (1, 3, M.P.)

5. A (3, Simp.)

6. $D \wedge E$ (4, 5, M.P.)

7. D (6, Simp.)

8. $D \vee E$ (7, Add.)

ตรรกบท 6 :

1. $(\neg U \vee V) \wedge (U \vee W)$

2. $\neg X \rightarrow \neg W \quad / \therefore V \vee X$

3. $(U \rightarrow V) \wedge (\neg U \rightarrow W)$ (1, Impl.)

4. $U \rightarrow V$ (3, Simp.)

5. $\neg U \rightarrow W$ (3, Simp.)

6. $\neg W \rightarrow U$ (5, Trans.)

7. $\neg W \rightarrow V$ (4, 6, H.S.)

8. $\neg X \rightarrow V$ (2, 7, H.S.)

9. $X \vee V$ (8, Impl.)

10. $V \vee X$ (9, Com.)

ตรรกบท 7 :

1. $[(H \wedge I) \rightarrow J] \wedge [\neg K \rightarrow (I \wedge \neg J)] \quad / \therefore H \rightarrow K$

2. $H \wedge I \rightarrow J$ (1, Simp.)

3. $H \rightarrow (I \rightarrow J)$ (2, Exp.)

4. $H \rightarrow (\neg I \vee J)$ (3, Impl.)

5. $\neg K \rightarrow (I \wedge \neg J)$ (1, Simp.)

6. $\neg (I \wedge \neg J) \rightarrow K$ (5, Trans.)

7. $(\neg I \vee J) \rightarrow K$ (6, De.M.)

8. $H \rightarrow K$ (4, 7, H.S.)

แบบฝึกหัด 9

ในข้อ 1-10 เป็นการพิสูจน์ตรรกบท จงเขียนเหตุผลในบรรทัดที่ไม่เป็นข้อกำหนด

1. 1. $K \rightarrow L$
   2. $M \rightarrow N$
   3. $(O \rightarrow N) \wedge (P \rightarrow L)$
   4. $(\neg N \vee \neg L) \wedge (\neg M \vee \neg O)$
      $/ \therefore (\neg O \vee \neg P) \wedge (\neg M \vee \neg K)$
   5. $(M \rightarrow N) \wedge (K \rightarrow L)$
   6. $\neg N \vee \neg L$
   7. $\neg M \vee \neg K$
   8. $\neg O \vee \neg P$
   9. $(\neg O \vee \neg P) \wedge (\neg M \vee \neg K)$

2. 1. $F \vee (G \vee H)$
   2. $(G \rightarrow I) \wedge (H \rightarrow J)$
   3. $(I \vee J) \rightarrow (F \vee H)$
   4. $\neg F \quad / \therefore H$
   5. $G \vee H$
   6. $I \vee J$
   7. $F \vee H$
   8. H

3. 1. $(L \vee M) \vee (N \wedge O)$
   2. $(\neg L \wedge O) \wedge \neg (\neg L \wedge M)$
      $/ \therefore \neg L \wedge N$
   3. $\neg L \wedge [O \wedge \neg (\neg L \wedge M)]$
   4. $\neg L$
   5. $L \vee [M \vee (N \wedge O)]$
   6. $M \vee (N \wedge O)$
   7. $(M \vee N) \wedge (M \vee O)$
   8. $M \vee N$
   9. $\neg L \wedge (M \vee N)$
   10. $(\neg L \wedge M) \vee (\neg L \wedge N)$
   11. $\neg (\neg L \wedge M) \wedge (\neg L \wedge O)$
   12. $\neg (\neg L \wedge M)$
   13. $\neg L \wedge N$

4. 1. $(E \wedge F) \wedge G$
   2. $(F \rightarrow G) \rightarrow (H \vee I) \quad / \therefore I \vee H$
   3. $E \wedge (F \wedge G)$
   4. $(F \wedge G) \wedge E$
   5. $F \wedge G$
   6. $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$
   7. $F \leftrightarrow G$
   8. $H \vee I$
   9. $I \vee H$

5)
1. $(J \wedge K) \rightarrow L$
2. $(J \rightarrow L) \rightarrow M$
3. $\neg K \vee N \quad / \therefore \quad K \rightarrow (M \wedge N)$
4. $(K \wedge J) \rightarrow L$
5. $K \rightarrow (J \rightarrow L)$
6. $K \rightarrow M$
7. $\neg K \vee M$
8. $(\neg K \vee M) \wedge (\neg K \vee N)$
9. $\neg K \vee (M \wedge N)$
10. $K \rightarrow (M \wedge N)$

6)
1. $(O \rightarrow \neg P) \wedge (P \rightarrow Q)$
2. $Q \rightarrow O$
3. $\neg R \rightarrow P \quad / \therefore \quad R$
4. $\neg Q \vee O$
5. $O \vee \neg Q$
6. $(O \rightarrow \neg P) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)$ 1
7. $\neg P \vee \neg P$
8. $\neg P$
9. $\neg \neg R$
10. R 1

7)
1. $S \rightarrow (T \rightarrow U)$
2. $U \rightarrow \neg U$
3. $(V \rightarrow S) \wedge (W \rightarrow T) \quad / \therefore \quad V \rightarrow \neg W$
4. $(S \wedge T) \rightarrow U$
5. $\neg U \vee \neg U$
6. $\neg U$
7. $\neg (S \wedge T)$
8. $\neg S \vee \neg T$
9. $\neg V \vee \neg W$
10. $V \rightarrow \neg W$

8)
1. $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$
2. $X \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $X \wedge (Y \vee A)$
4. $\neg Z \quad / \therefore \quad B$
5. $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ 1
6. $(X \wedge A) \rightarrow B$
7. $(X \wedge Y) \vee (X \wedge A)$
8. $[(X \wedge Y) \rightarrow Z] \wedge [(X \wedge A) \rightarrow B]$
9. $Z \vee B$
10. B 17

9)
1. $C \rightarrow (D \rightarrow \neg C)$
2. $C \leftrightarrow D \quad / \therefore \quad \neg C \wedge \neg D$
3. $C \rightarrow (\neg \neg C \rightarrow \neg D)$
4. $C \rightarrow (C \rightarrow \neg D)$
5. $(C \wedge C) \rightarrow \neg D$
6. $C \rightarrow \neg D$
7. $\neg C \vee \neg D$

10)
1. $E \wedge (F \vee G)$
2. $(E \wedge G) \rightarrow \neg (H \vee I)$
3. $(\neg H \vee \neg I) \rightarrow \neg (E \wedge F) \quad / \therefore \quad H \leftrightarrow I$
4. $(E \wedge G) \rightarrow (\neg H \wedge \neg I)$
5. $\neg (H \wedge I) \rightarrow \neg (E \wedge F)$
6. $(E \wedge F) \rightarrow (H \wedge I)$
7. $[(E \wedge F) \rightarrow (H \wedge I)] \wedge [(E \wedge G) \rightarrow (\neg H \wedge \neg I)]$

8. $\neg (C \wedge D)$

9. $(C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D)$

10. $\neg C \wedge \neg D$

8. $(E \wedge F) \vee (E \wedge G)$

9. $(H \wedge I) \vee (\neg H \wedge \neg I)$

10. $H \leftrightarrow I$

จงพิสูจน์ตรรกบทในข้อ 11 - 20 ต่อไปนี้

11) $E \rightarrow (F \wedge \neg G)$

$(F \vee G) \rightarrow H$

E

$\therefore H$

12) $J \rightarrow K$

$J \vee (K \vee \neg L)$

$\neg K$

$\therefore \neg L \wedge \neg K$

13) $M \rightarrow N$

$N \rightarrow O$

$(M \rightarrow O) \rightarrow (N \rightarrow P)$

$(M \rightarrow P) \rightarrow Q$

$\therefore Q$

14) $A \rightarrow (B \wedge C)$

$\neg A \rightarrow [(D \rightarrow E) \wedge (F \rightarrow G)]$

$(B \wedge C) \vee [(\neg A \rightarrow D) \wedge (\neg A \rightarrow F)]$

$\neg (B \wedge C) \wedge \neg (G \wedge D)$

$\therefore E \vee G$

15. $A \rightarrow B$

$C \rightarrow D$

$(\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee B)$

$\therefore \neg A \vee \neg C$

16. $(\neg H \vee I) \rightarrow (J \rightarrow K)$

$(\neg L \wedge \neg M) \rightarrow (K \rightarrow N)$

$(H \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow H)$

$(\neg L \wedge \neg M) \wedge \neg O$

$\therefore J \rightarrow N$

17. $V \rightarrow W$

$X \rightarrow Y$

$Z \rightarrow W$

$X \rightarrow A$

$W \rightarrow X$

$[(V \rightarrow Y) \wedge (Z \rightarrow A)] \rightarrow (V \wedge Z)$

$\therefore Y \vee A$

18. $(B \vee C) \rightarrow (D \vee E)$

$[(D \vee E) \vee F] \rightarrow (G \vee H)$

$(G \vee H) \rightarrow \neg D$

$E \rightarrow \neg G$

$\therefore H$

19. ค่าแรงงานสูงขึ้นตามราคาสินค้า
ราคาสินค้าสูงขึ้น หรือมีการควบคุมราคาสินค้า
ถ้ามีการควบคุมราคาสินค้า แล้วจะไม่มีภาวะเงินเฟ้อ
แต่ขณะนี้เกิดภาวะเงินเฟ้อ

เพราะฉะนั้นขณะนี้ค่าแรงงานสูง

20. นายแดงเล่นแบดมินตันชนะ ก็ต่อเมื่อ เขาเล่นสุดฝีมือและคู่ต่อสู้เล่นพลาด
นายแดงเล่นสุดฝีมือแล้วแต่ไม่ชนะ

เพราะฉะนั้นคู่ต่อสู้เล่นไม่พลาด

2. การพิสูจน์แบบมีเงื่อนไข (Conditional Proofs)

พิจารณาตรรกบท

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \vee r \\ q \rightarrow \neg p \\ s \rightarrow \neg r \\ \hline \therefore\ p \rightarrow \neg s \end{array}$$

จะเห็นว่าถ้าพิสูจน์ตรรกบทนี้ด้วยการเริ่มจากข้อกำหนดไปสู่ข้อสรุปโดยใช้กฎการอ้างอิงและกฎการแทนที่ดังกล่าวในการพิสูจน์ทางตรง ดูจะเป็นเรื่องไม่ง่ายนัก เพราะข้อกำหนดทั้งหมดไม่สัมพันธ์กันในรูปกฎการอ้างอิง หรือถึงแม้จะเปลี่ยนข้อกำหนดโดยใช้กฎการแทนที่แล้วก็ตาม

สังเกตว่าข้อสรุปของตรรกบทอยู่ในรูปข้อความแจงเหตุสู่ผล เราจึงจะพิจารณาตรรกบททั่วไปที่มีข้อสรุปในรูปข้อความแจงเหตุสู่ผล

$$\begin{array}{l} P \\ \hline \therefore\ A \rightarrow C \end{array}$$

ตรรกบทนี้มีการอนุมานที่สอดคล้องกันคือ

$$P \rightarrow (A \rightarrow C)$$

ซึ่งสมมูลกับข้อความแจงเหตุสู่ผล

$$P \wedge A \rightarrow C$$

ที่อาจเขียนได้ในรูปตรรกบท

$$\begin{array}{l} P \\ A \\ \hline \therefore C \end{array}$$

เพราะฉะนั้นตรรกบท

$$\begin{array}{l} P \\ \hline \therefore A \rightarrow C \end{array}$$

สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อตรรกบท

$$\begin{array}{l} P \\ A \\ \hline \therefore C \end{array}$$

สมเหตุสมผล และขอให้สังเกตว่าเราสามารถพิสูจน์ตรรกบท

$$\begin{array}{l} P \\ A \\ \hline \therefore C \end{array}$$

ได้ด้วยวิธีพิสูจน์ทางตรง

การพิสูจน์แบบมีเงื่อนไข (C.P.) : *การพิสูจน์การอนุมานหรือตรรกบทที่มีข้อสรุปในรูปข้อความแจงเหตุสู่ผล ให้สมมติ "เหตุ" ของข้อสรุปเป็นข้อกำหนดของตรรกบทอีกข้อความหนึ่ง*

ตรรกบท 8 :

1. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
2. $(D \vee E) \rightarrow F \quad / \therefore A \rightarrow F$
3. $A \quad / \therefore F$ (C.P.)
4. $A \vee B$ (3, Add.)

5. $C \wedge D$ (1, 4, M.P.)

6. D (5, Simp.)

7. $D \vee E$ (6, Add.)

8. F (2, 7, M.P.)

9. $\therefore A \rightarrow F$ (3-8, C.P.)

ตรรกบท 9 :

1. $(s \vee t) \rightarrow w$

2. $\neg s \rightarrow \neg w \quad / \therefore t \rightarrow s$

3. $t \quad / \therefore s$ (C.P.)

4. $s \vee t$ (3, Add.)

5. w (1, 4, M.P.)

6. s (2, 5, M.T.)

7. $\therefore t \rightarrow s$ (3-6, C.P.)

ตรรกบท 10 :

1. $A \rightarrow B \quad / \therefore A \rightarrow (A \wedge B)$

2. $A \quad / \therefore A \wedge B$ (C.P.)

3. B (1, 2, M.P.)

4. $A \wedge B$ (2, 3, Conj.)

5. $\therefore A \rightarrow (A \wedge B)$ (2-4, C.P.)

ตรรกบท 11 :

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

2. $B \rightarrow (C \rightarrow D) \quad / \therefore A \rightarrow (B \rightarrow D)$

3. $A \quad / \therefore B \rightarrow D$ (C.P.)

4. $B \quad / \therefore D$ (C.P.)

5.	$B \rightarrow C$	(1, 3, M.P.)
6.	C	(4, 5, M.P.)
7.	$C \rightarrow D$	(2, 4, M.P.)
8.	D	(6, 7, M.P.)
9.	$\therefore B \rightarrow D$	(4-8, C.P.)
10.	$\therefore A \rightarrow (B \rightarrow D)$	(3-9, C.P.)

แบบฝึกหัด 10

จงพิสูจน์ตรรกบทในข้อต่อไปนี้ โดยการพิสูจน์แบบมีเงื่อนไข

1. C
   $\therefore D \rightarrow D$

2. $E \rightarrow (F \rightarrow G)$
   $\therefore F \rightarrow (E \rightarrow G)$

3. $H \rightarrow (I \wedge J)$
   $\therefore H \rightarrow J$

4. $N \rightarrow O$
   $\therefore (N \wedge P) \rightarrow O$

5. $T \rightarrow \neg (U \rightarrow V)$
   $\therefore T \rightarrow U$

6. $W \rightarrow (X \vee \neg Y)$
   $\therefore W \rightarrow (Y \rightarrow X)$

7. $E \rightarrow F$
   $G \rightarrow F$
   $\therefore E \vee G \rightarrow F$

8. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
   $C \rightarrow (D \wedge E)$
   $\therefore A \rightarrow (B \rightarrow D)$

9. $E \rightarrow F$
   $E \rightarrow G$
   $\therefore E \rightarrow (F \wedge G)$

10. $H \rightarrow (I \vee J)$
    $\neg I$
    $\therefore H \rightarrow J$

11. $O \rightarrow (P \rightarrow Q)$
    $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
    $\therefore O \rightarrow (P \rightarrow R)$

12. $[L \wedge (M \vee N)] \rightarrow (M \wedge N)$
    $\therefore L \rightarrow (M \rightarrow N)$

13. $(K \vee L) \rightarrow \neg (M \wedge N)$

$(\neg M \vee \neg N) \rightarrow (O \leftrightarrow P)$

$(O \leftrightarrow P) \rightarrow (Q \wedge R)$

$\therefore (L \vee K) \rightarrow (R \wedge Q)$

14. $p \rightarrow q \vee r$

$q \rightarrow \neg p$

$s \rightarrow \neg r$

$\therefore p \rightarrow \neg s$

15. $(S \rightarrow T) \wedge (U \rightarrow V)$

$W \rightarrow (S \vee U)$

$\therefore W \rightarrow (T \vee V)$

3. การพิสูจน์ด้วยข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive Proofs)

เนื่องจากทุกตรรกบทสอดคล้องกับการอนุมานในรูป

$P \rightarrow C$

และ

$$P \rightarrow C \equiv \neg C \rightarrow \neg P$$

ดังนั้นการแสดงว่าการอนุมาน "$P \rightarrow C$" สมเหตุสมผลอาจกระทำได้โดยการแสดงว่าการอนุมาน "$\neg C \rightarrow \neg P$" สมเหตุสมผลแทน ตัวอย่างเช่น จะแสดงว่าตรรกบท

$w \rightarrow (r \rightarrow s)$

$\therefore (w \wedge r) \rightarrow s$

หรือการอนุมาน

$$[w \rightarrow (r \rightarrow s)] \rightarrow [(w \wedge r) \rightarrow s]$$

สมเหตุสมผล เราอาจพิจารณาการอนุมาน ซึ่งเป็นข้อความแย้งสลับที่

$$\neg [(w \wedge r) \rightarrow s] \rightarrow \neg [w \rightarrow (r \rightarrow s)]$$

ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ แทนดังนี้

พิสูจน์ :

1.	$\neg [(w \wedge r) \rightarrow s]$	(ข้อกำหนดของข้อความแย้งสลับที่)
2.	$\neg [\neg (w \wedge r) \vee s]$	(1, Impl.)
3.	$(w \wedge r) \wedge \neg s$	(2, De.M.)

4.	$w \wedge (r \wedge \neg s)$	(3, Assoc.)
5.	$w \wedge [\neg (\neg r \vee s)]$	(4, De.M.)
6.	$w \wedge [\neg (r \rightarrow s)]$	(5, Impl.)
7.	$\neg [\neg w \vee (r \rightarrow s)]$	(6, De.M.)
8.	$\neg (w \rightarrow (r \rightarrow s))$	(7, Impl.)

ตรรกบท 12 :

1.	$(A \vee B) \rightarrow [(C \vee D) \rightarrow E]$ / $\therefore$ $A \rightarrow [(C \wedge D) \rightarrow E]$	
2.	$\neg [A \rightarrow [(C \wedge D \rightarrow E]]$	(ข้อกำหนดของข้อความแย้งสลับที่)
3.	$\neg [\neg A \vee [(C \wedge D) \rightarrow E]]$	(2, Impl.)
4.	$A \wedge [\neg [(C \wedge D) \rightarrow E]]$	(3, De.M.)
5.	$A \wedge [\neg [\neg (C \wedge D) \vee E]]$	(4, Impl.)
6.	$A \wedge (C \wedge D) \wedge \neg E$	(5, De.M.)
7.	A	(6, Simp.)
8.	$A \vee B$	(7, Add.)
9.	$C \wedge D$	(6, Simp.)
10.	C	(9, Simp.)
11.	$C \vee D$	(10, Add.)
12.	$\neg E$	(6, Simp.)
13.	$(C \vee D) \wedge \neg E$	(11, 12, Conj.)
14.	$\neg [\neg (C \vee D) \vee E]$	(13, De.M.)
15.	$\neg [(C \vee D) \rightarrow E]$	(14, Impl.)
16.	$(A \vee B) \wedge \neg [(C \vee D) \rightarrow E]$	(8, 15, Conj.)
17.	$\neg [\neg (A \vee B) \vee [(C \vee D) \rightarrow E]]$	(16, De.M.)
18.	$\neg [(A \vee B) \rightarrow [(C \vee D) \rightarrow E]]$	(17, Impl.)

แบบฝึกหัด 11

จงพิสูจน์ตรรกบทในข้อต่อไปนี้ ด้วยข้อความแย้งสลับที่

1. $E \rightarrow \neg F$
   $\therefore (E \rightarrow \neg F) \vee (\neg G \rightarrow H)$

2. $\neg q$
   $\therefore \neg (p \wedge q)$

3. $(A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg C \rightarrow D)$
   $\therefore A \rightarrow \neg B$

4. $(w \wedge r) \rightarrow s$
   $\therefore w \rightarrow (r \rightarrow s)$

5. ข้อ 1 - 6 ของแบบฝึกหัด 10

4. การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proofs)

การพิสูจน์ทางอ้อมมีรากฐานมาจากความคิดที่ว่า ข้อสรุปของการอนุมานหนึ่งเป็นข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้นถ้านิเสธของข้อสรุปทำให้ได้นิเสธของสมมติฐานหรือข้อกำหนดอย่างน้อยหนึ่งข้อความ หรือนั่นคือทำให้เรามีข้อความขัดแย้งในรูป $C \wedge \neg C$ ซึ่งเป็นเท็จเสมอ จะทำให้ได้ว่านิเสธของข้อสรุปทำให้การอนุมานไม่สมเหตุสมผล และนั่นแสดงว่าการอนุมานจะสมเหตุสมผลเมื่อข้อสรุปเป็นจริงเท่านั้น

สังเกตว่ารากฐานความคิดดังข้างต้นคือการกล่าวว่าข้อความ

การพิสูจน์ทางอ้อม (I.P.) : *การอนุมาน* $P \rightarrow B$ *สมเหตุสมผล ถ้าการอนุมาน* $P \rightarrow (\neg B \rightarrow C \wedge \neg C)$ *เป็นสัจนิรันดร์*

พิสูจน์ : สมมติให้กลุ่มข้อกำหนดในรูปข้อความ P เป็นจริง ดังนั้นถ้าการอนุมาน $P \rightarrow (\neg B \rightarrow (C \wedge \neg C))$ สมเหตุสมผล เราต้องได้ว่าข้อความ $\neg B \rightarrow (C \wedge \neg C)$ เป็นจริงด้วย แต่ข้อความขัดแย้ง $C \wedge \neg C$ เป็นเท็จเสมอ เราจึงได้ $\neg B$ เป็นเท็จด้วย และนั่นคือ B เป็นจริง เพราะฉะนั้นกลุ่มของข้อกำหนด P เป็นจริงทำให้ได้ B เป็นจริง หรือนั่นคือการอนุมาน $P \rightarrow B$ สมเหตุสมผล ซึ่งแสดงว่าข้อความ (I.P.) เป็นจริงเสมอ

แต่

$$P \rightarrow (\neg B \rightarrow (C \wedge \neg C)) \equiv (P \wedge \neg B) \rightarrow (C \wedge \neg C)$$

เราจึงสรุปวิธีดำเนินการของการพิสูจน์ทางอ้อมได้ดังนี้

1. กำหนดนิเสธของข้อสรุปเป็นข้อกำหนดเพิ่มเติม

2. จากกลุ่มของข้อกำหนดเดิมกับข้อกำหนดเพิ่มเติมจาก (1) นำไปสู่ข้อความขัดแย้ง $C \wedge \neg C$ (โดยการพิสูจน์ทางตรงหรือแบบมีเงื่อนไข)

3. สรุปว่าการอนุมาน "$P \rightarrow B$" สมเหตุสมผลหรือเป็นจริง เนื่องจากสมมูลกับการอนุมาน $(P \wedge \neg B) \rightarrow (C \wedge \neg C)$ โดย(I.P.)

ตรรกบท 13 :

1.	$p \rightarrow q \quad / \therefore \neg q \rightarrow \neg p$	
2.	$\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$	(I.P.)
3.	$\neg(q \vee \neg p)$	(2, Impl.)
4.	$\neg q \wedge p$	(3, De.M.)
5.	$\neg q$	(4, Simp.)
6.	p	(4, Simp.)
7.	q	(1, 6, M.P.)
8.	$q \wedge \neg q$	(5, 7, Conj. ; ข้อความขัดแย้งกัน)
9.	$\therefore \neg q \rightarrow \neg p$	(2-8, I.P.)

ตรรกบท 14 :

1.	$r \vee \neg s$	
2.	$s \quad / \therefore r$	
3.	$\neg r$	(I.P.)
4.	$\neg s$	(1, 3, D.S.)
5.	$s \wedge \neg s$	(2, 4, Conj. ; ข้อความขัดแย้งกัน)
6.	$\therefore r$	(3-5, I.P.)

ตรรกบท 15 :

1.	$A \rightarrow B \wedge C$	
2.	$(B \vee D) \rightarrow E$	
3.	$D \vee A \quad / \therefore E$	
4.	$\neg E$	(I.P.)
5.	$\neg (B \vee D)$	(2, 4, M.T.)
6.	$\neg B \wedge \neg D$	(5, De.M.)
7.	$\neg D$	(6, Simp.)
8.	A	(3, 7, D.S.)
9.	$B \wedge C$	(1, 8, M.P.)
10.	B	(9, Simp.)
11.	$\neg B$	(6, Simp.)
12.	$B \wedge \neg B$	(10, 11, Conj. ; ข้อความขัดแย้งกัน)
13.	$\therefore E$	(4-12, I.P.)

แบบฝึกหัด 12

จงพิสูจน์ตรรกบทในข้อ 1 - 5 ต่อไปนี้ด้วยการพิสูจน์ทางตรง และด้วยการพิสูจน์ทางอ้อม พร้อมทั้งเปรียบเทียบจำนวนบรรทัดของการพิสูจน์ทั้งสองแบบ

1.
$$\begin{array}{l} A \vee (B \wedge C) \\ A \rightarrow C \\ \hline \therefore C \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} (D \vee E) \rightarrow (F \rightarrow G) \\ (\neg G \vee H) \rightarrow (D \wedge F) \\ \hline \therefore G \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} (H \rightarrow I) \wedge (J \rightarrow K) \\ (I \vee K) \rightarrow L \\ \neg L \\ \hline \therefore \neg (H \vee J) \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} (M \vee N) \rightarrow (O \wedge P) \\ (O \vee Q) \rightarrow (\neg R \wedge S) \\ (R \vee T) \rightarrow (M \wedge U) \\ \hline \therefore \neg R \end{array}$$

5. $(V \rightarrow \neg W) \wedge (X \rightarrow Y)$

$(\neg W \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow \neg A)$

$(Z \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow C)$

$V \wedge X$

$\therefore \neg B \wedge C$

6. จงพิสูจน์ตรรกบทในข้อ 11 - 20 ของแบบฝึกหัด 9 โดยการพิสูจน์ทางอ้อม

5. การพิสูจน์โดยการกำจัดกรณี (Eliminating Proofs)

การพิสูจน์วิธีนี้ใช้สำหรับพิสูจน์ การอนุมาน หรือ ตรรกบทที่มีข้อสรุป ในรูปข้อความเลือก

$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$

โดยอาศัยความเป็นสัจนิรันดร์ของข้อความ $P \vee \neg P$ หรือตรรกบทแบบคัดออก

$p \vee q$

$\neg p$

$\therefore q$

ตัวอย่างเช่น ถ้า A, B และ C เป็นจำนวนจริง แล้วข้อความใดข้อความหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียว คือ

$A > B$ หรือ $A = B$ หรือ $A < B$

เราจะต้องแสดงว่า ถ้า 2 กรณีใดๆเป็นเท็จแล้วกรณีที่เหลือจะต้องเป็นจริง หรืออาจเขียนในรูปตรรกบทได้เป็น

$p \vee q \vee r$

$\neg q$

$\neg r$

$\therefore p$

เป็นต้น

สำหรับตัวอย่างการพิสูจน์ด้วยวิธีนี้จะแสดงให้เห็นในบทที่ 4

2 . 11 การพิสูจน์สัจนิรันดร์

การจะแสดงว่าข้อความใดเป็นสัจนิรันดร์อาจกระทำได้โดยใช้วิธีพิสูจน์ข้อโต้แย้ง โดยแยกตามลักษณะรูปแบบของสัจนิรันดร์ดังนี้

ถ้าเป็นข้อความแจงเหตุสู่ผลซึ่งเป็นรูปแบบเดียวกับการอนุมาน แล้วการพิสูจน์ความเป็นสัจนิรันดร์ของข้อความจะกระทำได้โดยการพิสูจน์ข้อโต้แย้งดังกล่าวในหัวข้อ 2.10

ตัวอย่าง 1 : จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \wedge B)]$
3. $[A \rightarrow (B \wedge C)] \rightarrow \{[B \rightarrow (D \wedge E)] \rightarrow (A \rightarrow D)\}$

พิสูจน์ : (1)

1.	$P \quad / \therefore Q \rightarrow P$	(C.P.)
2.	$Q \quad / \therefore P$	(C.P.)
3.	$P \wedge Q$	(1, 2, Conj.)
4.	P	(3, Simp.)
5.	$\therefore Q \rightarrow P$	(2-4, C.P.)
6.	$\therefore P \rightarrow (Q \rightarrow P)$	(1-5, C.P.)

(2)

1.	$(A \rightarrow B) \quad / \therefore A \rightarrow (A \wedge B)$	(C.P.)
2.	$A \quad / \therefore A \wedge B$	(C.P.)
3.	B	(1, 2, M.P.)
4.	$A \wedge B$	(2, 3, Conj.)
5.	$A \rightarrow (A \wedge B)$	(2-4, C.P.)
6.	$(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \wedge B)]$	(1-5, C.P.)

(3)

1.	$A \rightarrow (B \wedge C) \quad / \therefore [B \rightarrow (D \wedge E)] \rightarrow (A \rightarrow D)$	(C.P.)
2.	$B \rightarrow D \wedge E \quad / \therefore A \rightarrow D$	(C.P.)

3.	$A \quad / \therefore D$	(C.P.)
4.	$B \wedge C$	(1, 3, M.P.)
5.	B	(4, Simp.)
6.	$D \wedge E$	(2, 5, M.P.)
7.	D	(6, Simp.)
8.	$A \rightarrow D$	(3-7, C.P.)
9.	$(B \rightarrow D \wedge E) \rightarrow (A \rightarrow D)$	(2-8, C.P.)
10.	$[A \rightarrow (B \wedge C)] \rightarrow \{[B \rightarrow (D \rightarrow E)] \rightarrow (A \rightarrow D)\}$	(1-9, C.P.)

แต่ถ้าข้อความไม่อยู่ในรูปข้อความแจงเหตุสู่ผล เราจะพิสูจน์ความเป็นสัจนิรันดร์โดยการพิสูจน์ทางอ้อม โดยใช้นิเสธของข้อความที่ต้องการแสดงว่าเป็นสัจนิรันดร์เป็นข้อกำหนด เพื่อนำไปสู่ข้อความขัดแย้ง

ตัวอย่าง 2 : จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

1. $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$
2. $A \vee (A \rightarrow B)$

พิสูจน์ : (1)

1.	$\neg [(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)]$	(I.P.)
2.	$\neg [(\neg A \vee B) \vee (A \vee C)]$	(1, Impl.)
3.	$\neg (\neg A \vee B) \wedge \neg (A \vee C)$	(2, De.M.)
4.	$A \wedge \neg B$	(3, Simp. และ De.M.)
5.	A	(4, Simp.)
6.	$\neg A \wedge \neg C$	(3, Simp. และ De.M.)
7.	$\neg A$	(6, Simp.)
8.	$A \wedge \neg A$	(5, 7, Conj. ; ข้อความขัดแย้งกัน)
9.	$(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$	(1-8, I.P.)

(2) 1.	$\neg [A \vee (A \rightarrow B)]$	(I.P.)
2.	$\neg A \wedge [\neg (A \rightarrow B)]$	(1, De.M.)
3.	$\neg A$	(2, Simp.)
4.	$\neg (A \rightarrow B)$	(2, Simp.)
5.	$\neg (\neg A \vee B)$	(4, Impl.)
6.	$A \wedge \neg B$	(5, De.M.)
7.	A	(6, Simp.)
8.	$A \wedge \neg A$	(3, 7, Conj. ; ข้อความขัดแย้งกัน)
9.	$A \vee (A \rightarrow B)$	(1-8, I.P.)

แบบฝึกหัด 13

1. จงพิสูจน์สัจนิรันดร์ในข้อต่อไปนี้ โดยการพิสูจน์แบบมีเงื่อนไข

1.1 $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)]$

1.2 $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \rightarrow [Q \rightarrow (P \rightarrow R)]$

1.3 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

1.4 $\neg \neg P \rightarrow P$

1.5 $P \rightarrow \neg \neg P$

1.6 $(A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

1.7 $[(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \vee C)]$

1.8 $[(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \wedge C)]$

1.9 $(A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow B) \rightarrow B]$

1.10 $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)]$

1.11 $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (A \vee B)$

1.12 $(B \rightarrow C) \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (C \vee A)]$

1.13 $[(A \vee B) \rightarrow C] \rightarrow \{[(C \vee D) \rightarrow E] \rightarrow (A \rightarrow E)\}$

1.14 $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$

1.15 $P \rightarrow P \wedge P$

1.16 $(P \wedge Q) \rightarrow P$

1.17 $(P \rightarrow Q) \rightarrow [\neg (Q \wedge R) \rightarrow \neg (R \wedge P)]$

2. จงพิสูจน์สัจนิรันดร์ในข้อต่อไปนี้โดยการพิสูจน์ทางอ้อม

2.1 $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow \neg B)$

2.2 $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow B)$

2.3 $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

2.4 $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$

2.5 $P \leftrightarrow \neg \neg P$

2.6 $A \leftrightarrow [A \wedge (A \vee B)]$

2.7 $A \leftrightarrow [A \vee (A \wedge B)]$

2.8 $\neg [(A \rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \rightarrow A)]$

3. จงพิสูจน์สัจนิรันดร์ในข้อ 1 โดยการพิสูจน์ด้วยข้อความแย้งสลับที่

4. จงพิสูจน์สัจนิรันดร์ในข้อ 2 (2.1 - 2.4) โดยการกำจัดกรณี

2 . 12 การพิสูจน์ว่าไม่จริง

การพิสูจน์ว่าไม่จริง (disproof) เป็นการพิสูจน์ว่าตรรกบท หรือการอนุมานไม่สมเหตุสมผล ซึ่งโดยบทนิยาม 1 ของหัวข้อ 2.8 เราก็เพียงแต่สร้างตัวอย่างที่จะทำให้ตรรกบทหรือการอนุมานในรูปแบบที่กำลังพิจารณานั้นๆว่าประกอบด้วยข้อกำหนดเป็นจริง แต่ข้อสรุปเป็นเท็จ ตัวอย่างเช่นการอนุมาน

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F

เมื่อพิจารณาตารางค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \rightarrow q$ ข้างต้นจะเห็นว่ามีกรณีที่ทำให้การอนุมานไม่สมเหตุสมผลนั่นคือกรณีที่ประพจน์ p และ q เป็นเท็จพร้อมกัน ดังนั้นเราจึงสร้างตัวอย่างให้สอดคล้องกับกรณีดังกล่าว เพื่อแสดงให้เห็นจริงว่า การอนุมานไม่สมเหตุสมผล เช่นให้

p : 7 น้อยกว่า 3

q : 9 น้อยกว่า 5

เป็นต้น

เราจะเรียกตัวอย่างที่สร้างขึ้นเพื่อแสดงว่าการอนุมานไม่สมเหตุสมผลว่า *ตัวอย่างค้าน (counter example)*

ตัวอย่าง 1 : พิจารณาตรรกบท

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

จะเห็นว่าตรรกบทนี้ไม่สมเหตุสมผล เนื่องจากมีตัวอย่างค้านคือ

นายแดงเป็นผู้หญิงหรือผู้ชาย

นายแดงไม่เป็นผู้ชาย

ดังนั้นนายแดงไม่เป็นผู้หญิง

นอกจากเราจะแสดงว่าการอนุมานไม่จริงโดยยกตัวอย่างค้านดังกล่าวข้างต้นแล้ว เรายังสามารถพิสูจน์ว่าการอนุมานไม่จริง โดยการสมมติในทางตรงข้ามกล่าวคือสมมติว่าการอนุมานที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นสมเหตุสมผลหรือเป็นจริง และจากการสมมตินี้นำเราไปสู่ข้อขัดแย้ง (ข้อความ $C \wedge \neg C$) ดังนั้นสิ่งที่สมมติไว้จึงไม่เป็นจริง หรือนั่นคือสิ่งที่กำลังพิสูจน์ไม่จริง เราเรียกวิธีการพิสูจน์ในลักษณะนี้ว่า *การพิสูจน์ว่าไม่จริงโดยการหาข้อขัดแย้ง (Disproof by Contradiction)*

ตัวอย่างการพิสูจน์ว่าไม่จริงจะแสดงให้เห็นเพิ่มเติมในบทที่ 4

แบบฝึกหัด 14

จงแสดงว่าตรรกบท หรือการอนุมานในข้อต่อไปนี้ไม่สมเหตุสมผล หรือไม่เป็นจริงโดยการหาข้อขัดแย้ง หรือโดยการยกตัวอย่างค้าน

1. $A \rightarrow B$
   $C \rightarrow D$
   $B \vee C$
   $\therefore A \vee D$

2. $E \rightarrow (F \vee G)$
   $G \rightarrow (H \wedge I)$
   $\neg H$
   $\therefore E \rightarrow I$

3. $J \rightarrow (K \rightarrow L)$
   $K \rightarrow (\neg L \rightarrow M)$
   $(L \vee M) \rightarrow N$
   $\therefore J \rightarrow N$

4. $(O \vee P) \rightarrow Q$
   $Q \rightarrow (P \vee R)$
   $O \rightarrow (\neg S \rightarrow P)$
   $(S \rightarrow O) \rightarrow \neg R$
   $\therefore P \leftrightarrow Q$

5. $T \leftrightarrow U$
   $U \leftrightarrow (V \wedge W)$
   $V \leftrightarrow (T \vee X)$
   $\therefore T \wedge X$

6. $A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$
   $B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C)$
   $C \leftrightarrow (A \vee \neg B)$
   B
   $\therefore A \vee C$

7. $\{[(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge [(D \vee E) \rightarrow G]\} \rightarrow (A \rightarrow G)$

8. $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge r)$

9. $[(\neg L \rightarrow S) \wedge (W \rightarrow \neg S)] \rightarrow (W \rightarrow \neg L)$

10. $\{[B \leftrightarrow (F \wedge M)] \wedge (F \wedge \neg B)\} \rightarrow M$

บทที่ 3

ตรรกศาสตร์ภาคแสดง

3.1 การเปลี่ยนภาษาเป็นสัญลักษณ์

ดังที่กล่าวแล้วว่าประพจน์ หรือนั่นคือประโยคในตรรกศาสตร์เป็นประโยคบอกเล่าที่สามารถบอกค่าความจริงได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยไม่เปลี่ยนแปลงตามสภาพการณ์ เราจึงใช้สัญลักษณ์แทนข้อความเหล่านี้ได้ โดยถือว่าข้อความเชิงประกอบเป็น*ฟังก์ชันความจริง (truth function)* อย่างไรก็ตามประโยคบอกเล่าบางประโยคของภาษาในชีวิตประจำวันก็สามารถบอกค่าความจริงได้แน่นอน เช่น "โลกแบน" หรือ "ธงชาติไทยมี 3 สี" ซึ่งเราก็จะถือว่าประโยคบอกเล่าลักษณะเช่นนี้เป็นข้อความที่เราสามารถแทนได้ด้วยสัญลักษณ์เช่นกัน และถ้าเราเรียกภาษาในชีวิตประจำวันอย่างสั้นๆว่า "ภาษา" แล้วความหมายข้างต้นก็คือเราสามารถเปลี่ยนภาษาให้เป็นสัญลักษณ์ได้ แต่ถ้าพิจารณาภาษาในรูปตรรกบทต่อไปนี้

พลเมืองดีย่อมรักษากฎหมาย
นายแดงเป็นคนดี

เพราะฉะนั้นนายแดงรักษากฎหมาย

สามัญสำนึกบอกเราว่าตรรกบทนี้สมเหตุสมผล อย่างไรก็ตามเราไม่อาจเขียนตรรกบทที่เป็นภาษานี้ในรูปตรรกบทสัญลักษณ์ที่สมเหตุสมผลอย่างที่เรารู้จักกันในบทก่อนได้ ซึ่งแสดงว่าการกำหนดข้อความในรูปสัญลักษณ์เท่าที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 (นั่นคือการให้ประพจน์เชิงเดียวแทนด้วยอักษรตัวเดียว และข้อความเชิงประกอบอยู่ในรูปตัวเชื่อมประพจน์ของประพจน์เชิงเดียว) ยังไม่เพียงพอที่จะเปลี่ยนภาษาทั้งหมดให้เป็นรูปสัญลักษณ์ได้ นักตรรกศาสตร์จึงคิดหาวิธีการกำหนดภาษาสัญลักษณ์เพื่อให้เขียนภาษาทั้งหมดได้ในรูปสัญลักษณ์ ตรรกศาสตร์ภาคแสดงจึงถูกกำหนดขึ้น

พิจารณาประพจน์เชิงเดียวทั่วๆไป

"นายแดงมีชีวิต"

จะเห็นว่าข้อความนี้ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ *ประธาน (subject term)* ซึ่งในทางตรรกศาสตร์

เราจะหมายถึงส่วนที่อาจแทนด้วย "สิ่งใดก็ได้" เช่นในข้อความตัวอย่างก็คือ "นายแดง" กับ *ภาคแสดง(predicate)* ซึ่งคือกลุ่มคำที่ใช้ขยายประธาน จึงอาจเป็น กริยา วิเศษณ์ คุณศัพท์ หรือความสัมพันธ์ เป็นต้น และสำหรับในข้อความตัวอย่างข้างต้นก็คือ "มีชีวิต" ดังนั้นการใช้สัญลักษณ์แทนข้อความนี้จึงควรกำหนดสัญลักษณ์แทนทั้งสองส่วนให้ต่างกัน ซึ่งนิยมกำหนดดังนี้

1. *ประธาน (subject term* หรือ *individual)* เรานิยมเขียนแทนส่วนนี้ด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก

สังเกตว่าประธานของ "นายแดงมีชีวิต" เป็นสิ่งชี้เฉพาะ(specific object) คือ "นายแดง" แต่ประธานของ "มนุษย์เป็นสิ่งมีชีวิต" ซึ่งคือ "มนุษย์" ไม่ชี้เฉพาะว่าคือคนใด หรือสิ่งใดเราจึงใช้สัญลักษณ์แทนประธานทั้งสองลักษณะให้แตกต่างกันด้วย โดยนิยมใช้สัญลักษณ์ a, b, c, ... แทนประธานที่เป็นสิ่งชี้เฉพาะ และเรียกว่า *ตัวคงที่ (constant)* ส่วนประธานที่ไม่เฉพาะเจาะจงนิยมแทนด้วย x, y, z, ... หรือ u, v, s, t, ... และเรียกว่า *ตัวแปร (variables)*

2. *ภาคแสดง (predicate)* เรานิยมเขียนแทนส่วนนี้ด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ... เป็นต้น

และเพื่อให้ส่วน "ประธาน" และ "ภาคแสดง" ได้สื่อความหมายสอดคล้องกันเรานิยมเขียนสัญลักษณ์ทั้งสองชนิดติดกันไปโดยให้ภาคแสดงนำหน้าหรือให้ประธานเป็นดรรชนีล่างของภาคแสดง เช่นถ้าให้ "d" แทน "นายแดง" และ "L" แทน "มีชีวิต" แล้วข้อความ "นายแดงมีชีวิต" จะแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ "Ld" หรือ "L_d" เป็นต้น

ข้อความหนึ่งอาจประกอบด้วยภาคแสดงเดียว หรือหลายภาคแสดงก็ได้ เช่น ข้อความ "นายแดงมีชีวิต" ภาคแสดงที่ขยายประธานมีเพียงภาคแสดงเดียวคือ "มีชีวิต" แต่สำหรับข้อความ

"มนุษย์เป็นสิ่งมีชีวิต"

สมมูลหรือมีความหมายเดียวกับข้อความ

"ถ้าสิ่งใดเป็นมนุษย์แล้วสิ่งนั้นมีชีวิต"

ซึ่งข้อความหลังอยู่ในรูปข้อความแจงเหตุสู่ผล โดยที่ประธานของข้อความเหตุและข้อสรุปเป็นตัวแปรเดียวกัน ส่วนภาคแสดงของข้อความเหตุคือ "เป็นมนุษย์" และภาค

แสดงของข้อสรุปคือ "มีชีวิต" ดังนั้นถ้าเราให้ตัวแปรเป็น x และ H แทน "เป็นมนุษย์" เราจะได้ข้อความตัวอย่างข้างต้นในรูปสัญลักษณ์เป็น

$Hx \rightarrow Lx$

ในทำนองเดียวกันภาคแสดงหนึ่งๆอาจขยายประธานได้มากกว่าหนึ่งประธาน เช่นข้อความ

"มนุษยโลกเป็นเพื่อนกัน"

ซึ่งสมมูลหรือมีความหมายเดียวกับข้อความ

"ถ้าสิ่งใด 2 สิ่งเป็นมนุษย์ แล้วทั้งสองสิ่งนั้นเป็นเพื่อนกัน"

ในข้อความหลังนี้ประกอบด้วยภาคแสดง 2 ส่วนคือ "เป็นมนุษย์" และ "เป็นเพื่อนกัน" แต่เนื่องจาก "เป็นเพื่อนกัน" ไม่สามารถขยายประธานเพียงตัวเดียวได้ ในลักษณะเช่นนี้เราจะใช้สัญลักษณ์ของภาคแสดงนำหน้าประธานทุกตัวที่ถูกขยายโดยภาคแสดงนั้น เช่นในกรณีของตัวอย่างที่กำหนดมานี้ถ้าให้ "F" แทน "เป็นเพื่อนกัน" และ "x" และ "y" เป็นตัวแปรแล้วข้อความตัวอย่างจะอยู่ในรูปสัญลักษณ์ดังนี้

$Hx \wedge Hy \rightarrow Fxy$ หรือ $H_x \wedge H_y \rightarrow F_{xy}$

หมายเหตุ : เราจะเรียกภาคแสดงที่ขยายประธานเพียงตัวเดียวว่า ภาคแสดง 1 ตำแหน่ง และเรียกภาคแสดงที่ขยายประธาน n ตัว($n \geq 1$) ว่าภาคแสดง n ตำแหน่ง

3 . 2 ประโยคเปิด

สังเกตประโยคสัญลักษณ์

$Mx \rightarrow Lx$

ซึ่งสมมติแทนข้อความ "ถ้า x เป็นมนุษย์แล้ว x มีชีวิต" ถ้าเรากล่าวเฉพาะประโยค "x เป็นมนุษย์" หรือ "Mx" (หรือกล่าวเฉพาะประโยค "x มีชีวิต" หรือ "Lx") จะเห็นว่าเราบอกค่าความจริงของประโยคไม่ได้ เพราะค่าความจริงของประโยคไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับว่าเราจะแทนตัวแปร x ด้วยสิ่งใด เช่น ถ้าแทน x ด้วย "นายแดง" แล้ว "นายแดงเป็นมนุษย์" เป็นข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริง แต่ถ้าแทน x ด้วย "นกอินทรี" แล้ว "นกอินทรีเป็นมนุษย์" จะเป็นข้อความเท็จ เป็นต้น อย่างไรก็ตามประโยคในลักษณะนี้มีประโยชน์ต่อการเปลี่ยนภาษาเป็นสัญลักษณ์ เราจึงกำหนดให้ประโยคลักษณะเช่นนี้อยู่ในตรรกศาสตร์

ด้วย และเรียกชื่อว่า *ประโยคเปิด (open sentence)*

ประโยคเปิด คือประโยคที่มีลักษณะสอดคล้องเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อ ต่อไปนี้คือ

1. มีตัวแปรเป็นประธานของประโยค (อาจมีหนึ่งหรือหลายตัวแปรก็ได้ เช่น "x บินได้" หรือ "x นับถือ y" หรือ "x อยู่ระหว่าง y กับ z" เป็นต้น)

2. ไม่เป็นประพจน์ (นั่นคือบอกค่าความจริงของประโยคไม่ได้)

3. เป็นประพจน์เมื่อแทนตัวแปรของประโยคด้วยตัวคงที่ เช่นจากตัวอย่างใน ข้อ 1 จะได้ว่า "กาบินได้" หรือ "2 อยู่ระหว่าง 1 กับ 3" เป็นประพจน์เป็นต้น

หมายเหตุ : การเชื่อมประโยคเปิดด้วยตัวเชื่อมประพจน์กับข้อความ หรือประโยคเปิดอื่นใดก็ตามจะทำให้ได้ประโยคเปิด

จากเงื่อนไขของประโยคเปิดแสดงว่าเราอาจทำให้ประโยคเปิดเป็นข้อความได้โดยการแทนตัวแปรด้วยตัวคงที่ แต่ถ้าเราสังเกตประโยคภาษาต่อไปนี้

"ทุกคนนับถือบางคน"

หรือ

"นกบินได้"

ซึ่งเป็นข้อความที่เกิดจากประโยคเปิดของตัวอย่างข้างต้นทั้งสิ้น แต่เราไม่ได้ทำให้ประโยคเปิดเหล่านี้เป็นข้อความด้วยการแทนตัวแปรด้วยตัวคงที่ที่เป็น "นกตัวใด" หรือ "คนที่ชี้เฉพาะคนใด" แสดงว่าการทำให้ประโยคเปิดเป็นข้อความมิใช่เพียงตามเงื่อนไข (3) ของประโยคเปิดเท่านั้น

เรามีวิธีทำให้ประโยคเปิดเป็นข้อความได้ 2 วิธีคือ

1. แทนตัวแปรด้วยตัวคงที่ (ดังกล่าวแล้ว)

หรือ 2. การบ่งปริมาณให้กับประโยคเปิด (ดังจะกล่าวรายละเอียดในหัวข้อต่อไป)

เราจะเรียกข้อความหรือข้อความที่ได้จากการบ่งปริมาณให้กับประโยคเปิดว่า *ประโยคปิด (closed sentences)* และขอให้สังเกตว่าการเชื่อมประโยคปิดด้วยตัวเชื่อมประพจน์จะยังคงได้ประโยคปิด

3 . 3 ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ

ข้อความ "คนทุกคนนับถือบางคน" บอกค่าความจริงของข้อความได้ แม้ว่าไม่ได้กล่าวชี้เฉพาะด้วยตัวคงที่ใด แต่ค่าความจริงขึ้นอยู่กับการบ่งปริมาณ "ทุกคน" กับ "บางคน" ของตัวแปรในข้อความนั้นๆเอง

ตัวบ่งปริมาณ (quantifiers) ในตรรกศาสตร์มีอยู่ 2 ชนิดคือ

1. **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (universal quantifiers)** เราใช้สัญลักษณ์แทนด้วย "∀ " หรือ "( )"

เมื่อมีการบ่งปริมาณทั้งหมดของตัวแปร x เราจะเขียนสัญลักษณ์ ∀ ตามด้วยตัวแปร x เป็น "∀x " หรือเขียนตัวแปร x ลงใน ( ) เป็น "(x)" และอ่านว่า "*x ทุกตัว*" หรือ "*ทุกๆ x*" หรือ " *x แต่ละตัว*" หรือ "*แต่ละ x*" *(for every x, for all x, for each x)* ตัวอย่างเช่นข้อความ

"ทุกสิ่งมีชีวิต"

เขียนแทนได้ด้วยประโยคสัญลักษณ์

(∀x)(Lx) หรือ (x)(Lx)

เมื่อให้ "L" แทนภาคแสดง "มีชีวิต" เป็นต้น

2. **ตัวบ่งปริมาณมีอยู่ หรือ มีอย่างน้อยหนึ่ง (existential quantifiers)** เราใช้สัญลักษณ์แทนด้วย "∃"

เมื่อมีการบ่งปริมาณ "บางตัว" หรือ "มีอยู่อย่างน้อยหนึ่ง" ของตัวแปร x เราจะเขียนสัญลักษณ์ "∃" ตามด้วยตัวแปร x เป็น "∃x " และอ่านว่า "*มี x บางตัว*" หรือ "*มี x อย่างน้อย 1 ตัว*" *(for some x, there exists at least an x)* ตัวอย่างเช่นข้อความ

"บางสิ่งมีชีวิต"

เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์

"(∃x)(Lx)"

เป็นต้น

พิจารณาประโยคที่ประกอบด้วยภาคแสดง 1 ตำแหน่งในรูปประโยคเปิด " Px" เราจะได้ประโยคเปิด 2 ลักษณะคือ

Px หมายถึง ตัวแปร x สอดคล้องกับภาคแสดง P

กับ $\neg$ Px หมายถึง ตัวแปร x ไม่สอดคล้องกับภาคแสดง P

จะทำให้เราได้ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว ด้วยกัน 4 รูปแบบดังนี้

1. $(\forall x)(Px)$ *รูปประโยคยืนยันทั้งหมด (universal affirmative)*
2. $(\exists x)(Px)$ *รูปประโยคยืนยันบางสิ่ง (particular affirmative)*
3. $(\forall x)(\neg Px)$ *รูปประโยคปฏิเสธทั้งหมด (universal negative)*
4. $(\exists x)(\neg Px)$ *รูปประโยคปฏิเสธบางสิ่ง (particular negative)*

ในภาษาลาตินคำว่า "*Affirmo*" แปลว่า "ฉันยืนยัน" ส่วน "*Nego*" แปลว่า "ฉันปฏิเสธ" เราจึงใช้อักษร A, I, E, O แทนข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณทั้ง 4 แบบข้างต้นตามลำดับ

ค่าความจริงของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณจะขึ้นอยู่กับขอบเขตของตัวแปรที่กล่าวถึงในข้อความ เช่นข้อความ

"ทุกสิ่งมีชีวิต" หรือ "$(\forall x)(Lx)$"

เป็นจริง เมื่อพิจารณาตัวแปร x เฉพาะกลุ่มของ คน สัตว์ และพืช แต่ถ้าขอบเขตของตัวแปร x รวมไปถึง ดิน น้ำ ลม และไฟ แล้วข้อความข้างต้นจะเป็นเท็จ เป็นต้น เราจึงกำหนดชื่อเรียกขอบเขตของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณว่า *โดเมน (domain)* หรือ *เอกภพ (universe)* ของข้อความ และนิยมใช้สัญลักษณ์แทนด้วย "D" ดังนั้นข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณจึงอาจอยู่ในรูป

$(\forall x \in D)(Ex)$ หรือ $(\exists x \in D)(Ex)$

ตามลำดับ

ข้อสังเกต :

1. ข้อความ A : $(\forall x \in D)(Px)$

- เป็นจริง ถ้าทุกสมาชิก a ในโดเมน D เราได้ Pa เป็นจริง
- เป็นเท็จ ถ้ามีสมาชิก b อย่างน้อยหนึ่งตัวในโดเมน D ที่ทำให้ Pb เป็นเท็จ

2. ข้อความ I : $(\exists x \in D)(Px)$

- เป็นจริง ถ้ามีสมาชิก b อย่างน้อยหนึ่งตัวในโดเมน D ที่ทำให้ Pb เป็นจริง
- เป็นเท็จ ถ้าทุกสมาชิก a ในโดเมน D เราได้ Pa เป็นเท็จ

3. ข้อความ E : $(\forall x \in D)(\neg Px)$

- เป็นจริง ถ้าทุกสมาชิก a ในโดเมน D เราได้ Pa เป็นเท็จ
- เป็นเท็จ ถ้ามีสมาชิก b อย่างน้อยหนึ่งตัวในโดเมน D ที่ทำให้ Pb เป็นจริง

4. ข้อความ O : $(\exists x)(\neg Px)$

- เป็นจริง ถ้ามีสมาชิก b อย่างน้อยหนึ่งตัวในโดเมน D ที่ทำให้ Pb เป็นเท็จ
- เป็นเท็จ ถ้าทุกสมาชิก a ในโดเมน D เราได้ Pa เป็นจริง

ด้วยลักษณะค่าความเป็นจริงของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณดังกล่าว ถ้าเราให้

$D := \{ d_1, d_2, d_3, \ldots \}$

เป็นโดเมนของข้อความ แล้วเราจะได้ข้อความสมมูลกันดังต่อไปนี้

$(\forall x)(Px) \equiv Pd_1 \wedge Pd_2 \wedge Pd_3 \wedge \ldots$

และ

$(\exists x)(Px) \equiv Pd_1 \vee Pd_2 \vee \ldots$

เป็นต้น

สังเกตข้อความ

"ทุกสิ่งมีชีวิต" หรือ "บางสิ่งมีชีวิต"

ถ้าเรากำหนดขอบเขตหรือโดเมนของ "สิ่ง" ให้เป็นเพียง "มนุษย์" เท่านั้น ข้อความทั้งสองจะเปลี่ยนเป็น

"มนุษย์ทุกคนมีชีวิต" กับ "มนุษย์บางคนมีชีวิต"

ซึ่งสมมูลกับการเขียนข้อความ

"ถ้าสิ่งใดเป็นมนุษย์แล้วสิ่งนั้นมีชีวิต"

กับ

"มีสิ่งซึ่งเป็นมนุษย์และสิ่งนั้นมีชีวิต"

หรือในรูปประโยคสัญลักษณ์

$(\forall x)(Hx \rightarrow Lx)$ กับ $(\exists x)(Hx \wedge Lx)$

ตามลำดับ เมื่อเราต้องการหานิเสธของข้อความทั้งสอง บางคนอาจจะคิดว่า "ไม่มีมนุษย์คนใดมีชีวิต" เป็นนิเสธของ "มนุษย์ทุกคนมีชีวิต" แต่ความคิดเช่นนี้ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก

"¬ (มนุษย์ทุกคนมีชีวิต)"

≡ ¬ [(นาย ก. มีชีวิต) และ (นาย ข. มีชีวิต) และ . . .]

≡ (นาย ก. ไม่มีชีวิต) หรือ (นาย ข. ไม่มีชีวิต) หรือ . . .]

≡ "มีมนุษย์ไม่มีชีวิต"

นั่นคือ

$\neg (\forall x)(Hx \rightarrow Lx) \equiv (\exists x)(Hx \wedge \neg Lx)$

และด้วยแนวคิดเดียวกันนี้เราก็จะได้

$\neg (\exists x)(Hx \wedge Lx) \equiv (\forall x)(Hx \rightarrow \neg Lx)$

เราจึงได้รูปแบบของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว จัดได้ 4 รูปแบบดังต่อไปนี้เท่านั้นคือ

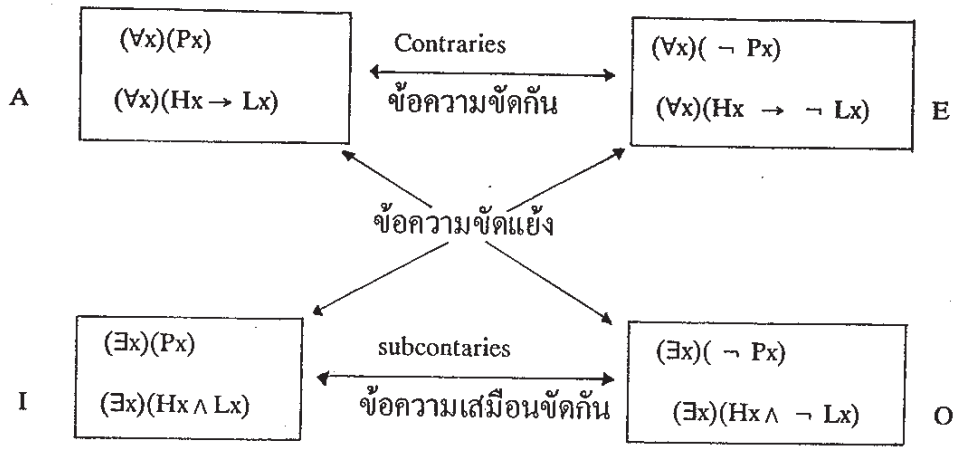
A : $(\forall x)(Hx \rightarrow Lx)$ "มนุษย์ทุกคนมีชีวิต"

I : $(\exists x)(Hx \wedge Lx)$ "มนุษย์บางคนมีชีวิต"

E : $(\forall x)(Hx \rightarrow \neg Lx)$ "มนุษย์ทุกคนไม่มีชีวิต"

O : $(\exists x)(Hx \wedge \neg Lx)$ "มนุษย์บางคนไม่มีชีวิต"

ซึ่งเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อความทั้ง 4 รูปแบบด้วย *จตุรัสของการตรงกันข้าม (square of opposition)* ข้างล่างนี้



สังเกตว่าข้อความในแนวทะแยงของจตุรัสเป็น*ข้อความขัดแย้ง (Contradiction)* หรือ*นิเสธ (Negation)* ของกันและกัน เนื่องจากข้อความทั้งสองเป็นจริงหรือเท็จพร้อมกันไม่ได้ ส่วน A กับ E เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้แต่อาจเป็นเท็จพร้อมกัน เราจึงเรียกข้อความคู่นี้ว่า*ข้อความขัดกัน (Contrary)* สำหรับ I กับ O เป็น *ข้อความเสมือนขัดกัน (Subcontrary)* เนื่องจากข้อความทั้งสองเป็นเท็จพร้อมกันไม่ได้ แต่อาจเป็นจริงพร้อมกัน

หมายเหตุ :

1. $\neg(\forall x)(Px) \equiv (\exists x)(\neg Px)$

   $\neg(\forall x)(Hx \rightarrow Lx) \equiv (\exists x)(Hx \wedge \neg Lx)$

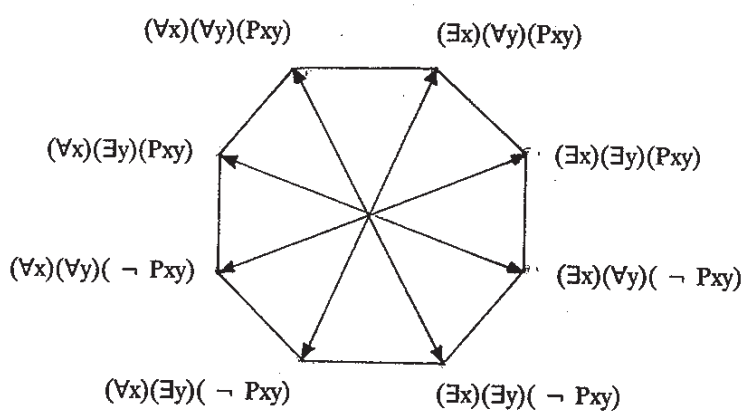
2. $\neg(\exists x)(Px) \equiv (\forall x)(\neg Px)$

   $\neg(\exists x)(Hx \wedge Lx) \equiv (\forall x)(Hx \rightarrow \neg Lx)$

สำหรับรูปแบบของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ n ตัว ซึ่งจะประกอบด้วยประโยคที่มีภาคแสดง n ตำแหน่ง เราจะอาศัยรูปแบบของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัวข้างต้นเป็นรูปแบบกำหนด โดยใช้หลักอธิบายว่า เมื่อพิจารณาตัวบ่งปริมาณตัวหนึ่งของตัวแปรใด จะถือว่าตัวแปรอื่นๆของตัวบ่งปริมาณอื่นๆคงที่ จึงทำให้เราได้รูปแบบทั้งหมดของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ n ตัวเป็น 4n รูปแบบ ตัวอย่างเช่นข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัวจะมี 8 รูปแบบ ดังต่อไปนี้คือ

1. $(\forall x)(\forall y)(Pxy)$ คนทุกคนชอบทุกๆคน
2. $(\forall x)(\exists y)(Pxy)$ คนทุกคนชอบบางคน
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg Pxy)$ คนทุกคนไม่ชอบทุกคน
4. $(\forall x)(\exists y)(\neg Pxy)$ คนทุกคนไม่ชอบบางคน
5. $(\exists x)(\forall y)(Pxy)$ คนบางคนชอบคนทุกคน
6. $(\exists x)(\exists y)(Pxy)$ คนบางคนชอบคนบางคน
7. $(\exists x)(\forall y)(\neg Pxy)$ คนบางคนไม่ชอบทุกคน
8. $\exists x)(\exists y)(\neg Pxy)$ คนบางคนไม่ชอบคนบางคน

ซึ่งเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อความทั้งแปดด้วยรูปแปดเหลี่ยม ดังนี้



หมายเหตุ : คู่ของข้อความที่อยู่บนแนวทะแยง "↔" ของรูปแปดเหลี่ยมข้างต้นเป็นข้อความขัดแย้ง หรือนิเสธของกันและกัน เพราะฉะนั้น

1. $\neg (\forall x)(\forall y)(Pxy) \equiv (\exists x)(\exists y)(\neg Pxy)$
2. $\neg (\forall x)(\exists y)(Pxy) \equiv (\exists x)(\forall y)(\neg Pxy)$
3. $\neg (\exists x)(\forall y)(Pxy) \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg Pxy)$
4. $\neg (\exists x)(\exists y)(Pxy) \equiv (\forall x)(\forall y)(\neg Pxy)$

ข้อสังเกต : $(\exists x)(\forall y)(Pxy)$ ≡ บางคนชอบทุกคน

จะไม่สมมูลกับ

$(\forall x)(\exists y)(Pxy)$ ≡ ทุกคนชอบคนบางคน

แสดงว่าอันดับของตัวบ่งปริมาณอาจทำให้ความหมายเปลี่ยนแปลงได้

กฎเกณฑ์ของการกำหนดรูปแบบข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณดังกล่าวมาข้างต้น พอเพียงที่จะเปลี่ยนภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ แม้ว่าภาษาจะมีความซับซ้อน (แต่ทั้งนี้ต้องอาศัยความเข้าใจความหมายของภาษาเข้าช่วยด้วย) ดังจะแสดงให้เห็นเป็นตัวอย่างพอสังเขป

ประโยคภาษา	ประโยคสัญลักษณ์
1. *ตำรวจกำลังมา*	$(\forall x)(Px \rightarrow Cx)$
[เมื่อกำหนดให้ Px : x เป็นตำรวจ และ Cx : x กำลังมา]	
2. *ถ้าพายุไต้ฝุ่นมา แล้วบ้านเรือนถูกทำลายหมด*	$H \rightarrow (\forall x)(Px \rightarrow Dx)$
[เมื่อกำหนดให้ H : พายุไต้ฝุ่น ; Px : x เป็นบ้านเรือน ; Dx : x ถูกทำลายหมด]	
3. *ไม่มีนักศึกษาคนใดเป็นคนขยัน*	$(\forall x)(Sx \rightarrow \neg Ix)$
[เมื่อกำหนดให้ Sx ; x เป็นนักศึกษา และ Ix : x เป็นคนขยัน]	

3 . 4 ตำแหน่งของตัวแปร

เปรียบเทียบข้อความ

"ดอกไม้สวย" $(\forall x)(Fx \rightarrow Bx)$ (1)

กับ

"ถ้าทุกสิ่งเป็นดอกไม้ แล้วสิ่งหนึ่งสวย" $(\forall x)Fx) \rightarrow Bx$ (2)

หรือข้อความ

"มีดอกไม้สวย" $(\exists x)(Fx \wedge Bx)$ (3)

กับ

"มีดอกไม้สวยและสิ่งหนึ่งสวย" $(\exists x)(Fx) \wedge Bx$ (4)

จะเห็นว่าข้อความ (1) หมายความว่า "ถ้าสิ่งใดเป็นดอกไม้แล้วสิ่งนั้นจะสวย" ในขณะที่ข้อความ (3) กล่าวถึง "มีสิ่งซึ่งเป็นดอกไม้ที่สวย" คำว่า "สิ่ง" ในแต่ละข้อความของทั้งสองข้อความนี้หมายถึงสิ่งเดียวกันที่เป็นดอกไม้และสวย แต่ข้อความ(2)หมายความว่า "ถ้าทุกสิ่งเป็นดอกไม้แล้วสิ่งหนึ่งจะสวย" ในขณะที่ข้อความ (4) กล่าวว่า "มีสิ่งที่เป็นดอกไม้กับสิ่งหนึ่งสวย" โดยคำว่า "สิ่ง" และ "สิ่งหนึ่ง" ในแต่ละข้อความของทั้งสองข้อความอาจไม่ใช่สิ่งเดียวกัน เราจึงสามารถเขียนตัวแปรของ "สิ่ง" และ "สิ่งหนึ่ง" ในทั้งสองข้อความให้ต่างกันได้ เป็นตามลำดับดังนี้

$$(\forall x)(Fx) \rightarrow By \qquad (2')$$

และ

$$(\exists x)(Fx) \wedge By \qquad (4')$$

และขอให้สังเกตว่า By ใน (2′) และ (4′) เป็นประโยคเปิด

เราจะเรียกตัวแปร x ของข้อความ (1) และ (3) ว่า*ตัวแปรมีขอบเขต (bound variable)* ในขณะที่จะเรียกตัวแปร y ของข้อความ (2′) และ (4′) ว่า *ตัวแปรเสรี (free variable)*

หรือนั่นคือ*ตัวแปรมีขอบเขต* คือตัวแปรของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ ซึ่งโดยมากนิยมเขียนวงเล็บให้กับข้อความซึ่งตัวบ่งปริมาณหนึ่งครอบคลุมไปถึง ในขณะที่ *ตัวแปรเสรี* คือตัวแปรที่จะทำให้ได้ประโยคเปิด

ตัวอย่าง 1 : จงบอกลักษณะตัวแปรของประโยคต่อไปนี้

1.	$(\forall x)(Px) \rightarrow (\exists x)(Qx)$	ตัวแปรมีขอบเขต
2.	$Ay \vee (\forall x)(\neg Ax)$	ตัวแปรอิสระ
3.	$[(Px \rightarrow (\forall x)[Qx]) \wedge \neg (\forall x)[Qx]] \rightarrow \neg Px$	ตัวแปรอิสระ
4.	$(\forall x)[Px \rightarrow p] \rightarrow [(\exists x)[Px] \rightarrow p]$	ตัวแปรมีขอบเขต
5.	$(\forall x)[(\exists y)(Sxy) \wedge Px]$	ตัวแปรมีขอบเขต

แบบฝึกหัด 1

1. จงพิจารณาค่าความจริงของข้อความในข้อต่อไปนี้ ว่าเป็นจริงเมื่อใด และเป็นเท็จเมื่อใด

   1.1 $(\forall x)[Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Rx)]$

   1.2 $(\forall x)(\exists y)(Pxy \wedge Qyx)$

   1.3 $(\forall x)(Px)$ และ $(\exists x)(Px)$ เมื่อ $Px := \int_0^{\pi x} \sin t \, dt$ เป็นบวก และ $D = \{0, 1, 2\}$

2. จงเขียนประโยคสัญลักษณ์ของข้อความในข้อต่อไปนี้ โดยใช้สัญลักษณ์ตามที่กำหนดให้ข้างล่างนี้

   Sx : x เป็นนักศึกษา

   Ax : x เป็นนักกีฬา

   Lxy : x ชอบ y

   Cx : x เป็นคนร่าเริง

   Gx : x เป็นผู้หญิง

   j : แจ่มใส

   2.1 นักศึกษาผู้ร่าเริงจะชอบนักกีฬา

   2.2 ไม่มีนักกีฬาคนใดเคร่งขรึม

   2.3 นักศึกษาหญิงบางคนเป็นนักกีฬา

   2.4 แจ่มใสไม่ชอบนักกีฬา

   2.5 นักศึกษาบางคนไม่ชอบนักกีฬาคนใดเลย

   2.6 ทั้งนักศึกษาและนักกีฬาชอบแจ่มใส

3. จงเขียนประโยคสัญลักษณ์ของข้อความในข้อต่อไปนี้ โดยใช้สัญลักษณ์ตามที่กำหนดให้ข้างล่างนี้

   Sxy : x ยกย่อง y

   Lxy : x เป็นที่รักของ y

   Exy : x ชอบ y

   Pz : z ต้องการความยกย่อง

   Hz : z เป็นคนซื่อสัตย์

   Fx : x เป็นคนชอบความสนุกสนาน

   My : y เป็นภาพยนตร์เรื่องหนึ่ง

   3.1 คนทุกคนจะมีบางคนที่เขายกย่องและคนทุกคนต้องการความยกย่อง

   3.2 มีบางคนเป็นที่รักของคนทุกคนและมีบางคนเป็นคนซื่อสัตย์

   3.3 ทุกคนซึ่งเป็นคนชอบความสนุกสนานจะต้องชอบภาพยนตร์ชุดนี้ทุกเรื่อง

4. จงเขียนนิเสธของข้อความในข้อ 2 และข้อ 3

5. จงเปลี่ยนตรรกบทในรูปภาษาต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ด้วยการกำหนดสัญลักษณ์ตาม

ความจำเป็น

5.1 เสือดุร้ายและดูน่ากลัว เสือบางตัวสง่างาม เพราะฉะนั้นมีบางสิ่งที่สง่างามแต่ดุร้าย

5.2 นักบินอวกาศต้องกล้าหาญ ดำไม่กล้าหาญ ดังนั้นดำไม่เป็นนักบินอวกาศ

5.3 นักบินทุกคนกล้าหาญ ทหารทุกคนกล้าหาญ ดังนั้นนักบินทุกคนเป็นทหาร

5.4 ผู้มีสิทธิลงคะแนนเสียงทุกคนต้องมีทะเบียนบ้านในเขต แต่ไม่ใช่ผู้มีทะเบียนบ้านในเขตทุกคนเป็นคนท้องถิ่น เพราะฉะนั้นผู้มีสิทธิลงคะแนนเสียงบางคนไม่เป็นคนท้องถิ่น

5.5 ไม่มีนักการศึกษาคนใดโง่งมงาย นักการพนันทุกคนโง่งมงาย เพราะฉะนั้นไม่มีนักการศึกษาคนใดเป็นนักการพนัน

5.6 นักเขียนนวนิยายชอบสังเกตการณ์ มีกวีบางคนไม่ชอบสังเกตการณ์ ดังนั้นไม่มีนักเขียนนวนิยายคนใดเป็นกวี

5.7 ไม้ยืนต้นทุกชนิดมีกลิ่นเฉพาะตัว ต้นยางบางชนิดไม่มีกลิ่น ดังนั้นต้นยางบางชนิดไม่เป็นไม้ยืนต้น

5.8 ม้าและวัวเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม สัตว์บางชนิดเลี้ยงลูกด้วยนม แต่สัตว์บางชนิดไม่เป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม เพราะฉะนั้นม้าและวัวเป็นสัตว์ชนิดหนึ่ง

✓6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ประกอบด้วยตัวแปรที่อยู่ในตำแหน่งอิสระหรือไม่

6.1 $(\forall x)(Ax) \rightarrow By$ 6.2 $(\exists x)(Px \wedge Qx)$

6.3 $Ax \rightarrow (\exists x)(Bx)$ 6.4 $(\exists x)(\exists y)(Pxy \wedge Qz)$

6.5 $(\exists x)(\forall y)(Px \wedge Qy) \rightarrow (\forall x)(Rx)$

✓7. กำหนดให้

Px : x เป็นจำนวนเฉพาะ Dxy : x เป็นตัวประกอบของ y

Ex : x เป็นจำนวนคู่ Sxy : x เท่ากับ y

Ox : x เป็นจำนวนคี่

จงเปลี่ยนประโยคสัญลักษณ์ในข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปภาษา

7.1 $(\forall x)(D2x \rightarrow Ex)$ 7.2 $(\exists x)(Ex \wedge Dx6)$

7.3 $(\forall x)(\neg Ex \rightarrow \neg D2x)$ 7.4 $(\forall x)(Px \rightarrow (\exists y)(Ey \wedge Dxy))$

7.5 $(\forall x)(Ox \rightarrow (\forall y)(Py \rightarrow \neg Dxy))$

7.6 $(\exists x)(Ex \wedge Px) \wedge \neg (\exists x)[(Ex \wedge Px) \wedge (\exists y)(\neg Sxy \wedge Ey \wedge Py)]$

3 . 5 การพิสูจน์ตรรกบทที่มีตัวบ่งปริมาณ

ข้อโต้แย้งหรือตรรกบทในตรรกศาสตร์ภาคแสดงยังคงมีความหมายเดียวกันกับที่กล่าวไว้ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ กล่าวคือตรรกบทประกอบด้วยกลุ่มข้อกำหนดกับข้อสรุป เพียงแต่ข้อความที่เป็นข้อกำหนดและข้อสรุปอาจอยู่ในรูปข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ เช่น

มนุษย์ทุกคนมีชีวิต	$(\forall x)(Mx \rightarrow Lx)$
นายแดงเป็นมนุษย์	Md
ดังนั้นนายแดงมีชีวิต	$\therefore Ld$

หรือ

มนุษย์เป็นสิ่งมีชีวิต	$(\forall x)(Mx \rightarrow Lx)$
สิ่งมีชีวิตต้องตาย	$(\forall x)(Lx \rightarrow Dx)$
ดังนั้นมนุษย์ทุกคนต้องตาย	$\therefore (\forall x)(Mx \rightarrow Dx)$

เป็นต้น และจะเห็นว่าถ้าเราถอดตัวบ่งปริมาณในกลุ่มข้อกำหนด เราก็จะสามารถใช้กฎการอ้างอิงของบทที่ 2 ในการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของตรรกบทเหล่านี้ได้ ในหัวข้อนี้จึงจะขอกล่าวถึงกฎเกณฑ์การลดรูป หรือคืนรูปตัวบ่งปริมาณ และจะเรียกว่า *กฎของการบ่งปริมาณ (Quantification Rules)* ซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 4 กฎ ดังนี้

กฎของการบ่งปริมาณ (Quantification Rules)

1. การลดรูปตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (Universal Instantiation หรือ U.I.)

กฎนี้มาจากสัจนิรันดร์

"ถ้าข้อความใดเป็นจริงสำหรับทุกสิ่ง แล้วข้อความนั้นย่อมเป็นจริงสำหรับสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่ชี้เฉพาะ"

หรือนั่นคือ ข้อความในรูป "$(\forall x)(Px)$" เป็นจริง แล้วข้อความเชิงเดียวที่ได้จากการแทนสิ่งชี้เฉพาะใดก็ตามเช่น a ลงที่ตัวแปร x ของข้อความนี้ จะทำให้ Pa เป็นจริงด้วย ดังนั้นตรรกบท

$$\frac{(\forall x)(Px)}{\therefore\ Pa}$$

จึงสมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 1 :

1. $(\forall x)(Hx \rightarrow Lx)$
2. $Hd \quad / \therefore Ld$
3. $Hd \rightarrow Ld$ (1, U.I.)
4. Ld (2, 3, M.P.)

2. การคืนรูปตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (Universal Generalization หรือ U.G.)

เนื่องจาก

$(\forall x)(Px) \equiv Px_1 \wedge Px_2 \wedge \ldots$

ดังนั้นการสรุปว่าข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณทั้งหมดรูป "$(\forall x)(Px)$" เป็นจริง อาจทำได้โดยแทนสมาชิกเฉพาะ x_i ของโดเมนแต่ละตัว ทีละตัวลงที่ตัวแปร x ของ Px แล้วแสดงว่า แต่ละ Px_i เป็นจริงทั้งหมด แต่วิธีการนี้จะทำไม่ได้กับโดเมนที่ประกอบด้วยสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วน เพราะการกระทำจะไม่สิ้นสุด เราจึงอาจสมมติให้ y เปรียบเสมือนตัวแทนของสมาชิกในโดเมนแต่ละตัว และหากเราพิสูจน์ได้ว่า Py เป็นจริง การพิสูจน์ที่ทำให้ได้ Py เป็นจริงจะเป็น *แบบแผน (pattern)* ของการพิสูจน์ว่า Px_i เป็นจริง สำหรับแต่ละ x_i ทีละ x_i ในโดเมน เพราะฉะนั้นจะขอกล่าวไว้เป็นหลักในรูปข้อความสั้นๆว่า

"ถ้าข้อความใดเป็นจริงสำหรับสิ่งที่เลือกมาอย่างไม่เจาะจง (arbitrary selected) แล้วข้อความนั้นจะเป็นจริงสำหรับทุกสิ่ง"

หรือในรูปตรรกบทที่สมเหตุสมผล

$$\frac{Py \quad (y \text{ เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง})}{\therefore\ (\forall x)(Px)}$$

ตัวอย่าง 2 :

1. $(\forall x)(Mx \rightarrow Lx)$
2. $(\forall x)(Lx \rightarrow Dx)$ / $\therefore$ $(\forall x)(Mx \rightarrow Dx)$
3. ให้ y เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง
4. $My \rightarrow Ly$ (1, 3, U.I.)
5. $Ly \rightarrow Dy$ (2, 3, U.I.)
6. $My \rightarrow Dy$ (4, 5, H.S.)
7. $(\forall x)(Mx \rightarrow Dx)$ (6, 3, U.G.)

หมายเหตุ : กฎของการบ่งปริมาณข้อที่ 2 หรือ U.G. นี้มีความสำคัญและจะต้องใช้กับข้อสรุปที่อยู่ในรูปที่มีตัวบ่งปริมาณ "∀" ทุกครั้ง เพราะหากละเลยกฎนี้แล้วจะทำให้เกิดความผิดพลาดในการพิสูจน์ตรรกบท ดังจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 :

1. นางสาวแดงผมยาว / เพราะฉะนั้นทุกคนผมยาว

1′. Ld

2. $(\forall x)(Lx)$ * ผิด เพราะ d เป็นตัวคงที่ที่เลือกมาอย่างเจาะจง

3 . การคืนรูปตัวบ่งปริมาณมีอยู่ (Existential Generalization หรือ E.G.)

ถ้าเราทราบว่ามีสิ่งชี้เฉพาะ หรือตัวคงที่ a สอดคล้องกับภาคแสดง P หรือนั่นคือข้อความ Pa เป็นจริงเราอาจกล่าวได้ว่า "มีสิ่งซึ่ง P" หรือนั่นคือข้อความ "$(\exists x)(Px)$" เป็นจริงด้วย เช่นถ้าเราทราบว่า "นางสาวแดงผมยาว" การกล่าวว่า "มีคนผมยาว" จะเป็นจริงด้วยเป็นต้น ซึ่งแสดงว่าตรรกบท

Pa (a เป็นตัวคงที่ หรือชี้เฉพาะ)

$\therefore$ $(\exists x)(Px)$

สมเหตุสมผล

4 . การลดรูปตัวบ่งปริมาณมีอยู่ (Existential Instantiation หรือ E.I.)

ส่วนการที่ทราบว่าข้อความ "$(\exists x)(Px)$" เป็นจริง เราจะทราบแต่เพียงว่า "มี" สิ่งชี้เฉพาะหนึ่งในโดเมนที่สอดคล้อง P เท่านั้น แต่เราไม่ทราบว่าเป็นสมาชิกตัวใดที่แน่นอนของโดเมน เช่นการกล่าวว่า "ในห้องนี้มีคนผมยาว" เราเพียงแต่ทราบว่า "มีคนผมยาว" แต่จะไม่ทราบแน่นอนลงไปว่าคนผมยาวนั้นคือใคร และชื่ออะไร แต่เราอาจใช้สัญลักษณ์ลักษณะชี้เฉพาะ เช่น "a" เป็น "*ชื่อสมมติ*" ของสิ่งที่เราทราบว่า "มี" และเมื่อสมมติแล้ว "a" จะเป็นตัวคงที่ต่อไป จะนำไปใช้เป็นตัวแปรอื่นใดอีกไม่ได้ เพราะฉะนั้นเรากล่าวได้ว่าตรรกบท

$$\frac{(\exists x)(Px)}{\therefore\ Pa \qquad \text{(สมมติ a เป็นตัวคงที่)}}$$

สมเหตุสมผล

หมายเหตุ : การนำ E.I. ไปอ้างอิงต้องระวังว่าตัวสมมติคงที่ "a" จะไม่เป็นตัวแปร และ/หรืออาจไม่ สอดคล้องกับภาคแสดงอื่นๆ

ตัวอย่าง 4 :

1. $(\forall x)(Dx \rightarrow Cx)$
2. $(\exists x)(Ax \wedge Dx)$ / $\therefore$ $(\exists x)(Ax \wedge Cx)$
3. $Aw \wedge Dw$ (2, E.I. โดยสมมติให้ w เป็นตัวสมมติคงที่)
4. $Dw \rightarrow Cw$ (1, U.I.)
5. Dw (3, Simp.)
6. Cw (4, 5, M.P.)
7. Aw (3, Simp.)
8. $Aw \wedge Cw$ (6, 7, Conj.)
9. $(\exists x)(Ax \wedge Cx)$ (8, E.G.)

ข้อควรระวัง !! การใช้กฎ E.I. พิสูจน์ความสมเหตุสมผลของตรรกบทโดยขาดความระมัดระวัง อาจพิสูจน์ตรรกบทที่ไม่สมเหตุสมผลให้เป็นตรรกบทที่สมเหตุสมผลได้ ตัวอย่างเช่น

เราทราบว่า

"บางคนผมยาวและบางคนผมสั้น ⇒ บางคนผมสั้นและผมยาว"
เป็นข้อความที่มีกรณีเป็นเท็จ แต่การใช้ E.I. อย่างผิดพลาดอาจพิสูจน์ให้ข้อความดังกล่าวเป็นสัจนิรันดร์ได้ดังการพิสูจน์ที่ผิดพลาดข้างล่างนี้

การพิสูจน์ที่ผิด :

1. $(\exists x)(Hx \wedge Lx)$
2. $(\exists x)(Hx \wedge Sx)$ / ∴ $(\exists x)(Lx \wedge Sx)$
3. $Ha \wedge La$ (1, E.I. โดยสมมติให้ a เป็นตัวสมมติคงที่ว่าสอดคล้องกับภาคแสดง L)
4. $Ha \wedge Sa$ (2, E.I.) (* *ผิด เพราะว่าตัวสมมติ<u>ควรต้อง</u>เป็นคนละตัวกับของข้อ 3 เพราะ a อาจไม่สอดคล้องกับภาคแสดง S*)
5. La (3, Simp.)
6. Sa (4, Simp.)
7. $La \wedge Sa$ (5, 6, Conj.)
8. $(\exists x)(Lx \wedge Sx)$ (7, E.G.)

การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของตรรกบทที่ประกอบด้วยข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณมากกว่า 1 ตัว เรายังคงใช้กฎของการบ่งปริมาณ 4 ข้อเดิมข้างต้น แต่เนื่องจากข้อความเหล่านี้ประกอบด้วยภาคแสดง n ($n \geq 1$) ตำแหน่ง หรือนั่นคือแต่ละภาคแสดงของข้อความประกอบด้วยตัวคงที่ และ/หรือ ตัวแปรมากกว่า 1 ตัว การใช้กฎจึงต้องเพิ่มความระมัดระวังให้มากขึ้นเพื่อมิให้เกิดความผิดพลาด ดังจะแนะนำข้อควรระวังสำหรับกฎแต่ละข้อเพิ่มเติม เพื่อให้เป็นแนวทางสังเกตพร้อมยกตัวอย่างประกอบพอเป็นสังเขป ดังต่อไปนี้

1 . ข้อควรระวังสำหรับกฎ U.I.

"เราจะแทนตัวแปร x ของข้อความ $(\forall x)(Px)$ *ให้ครบทุกแห่งด้วยตัวคงที่หรือตัวแปร แต่ต้องไม่ใช่ตัวแปรที่ถูกใช้แล้วกับตัวบ่งปริมาณอื่นๆ "*

เช่นตัวอย่างการพิสูจน์ที่ผิดพลาดต่อไปนี้

1. (∀x)(Pxx)
2. Pxy (1, U.I.) * *ผิด เพราะแทนตัวแปร x ไม่ครบทุกแห่ง*
3. (∀y)(Pxy) (2, U.G.)
4. (∀x)(∀y)(Pxy) (3, U.G.)

อาจทำให้ข้อความที่มีกรณีเป็นเท็จ เช่นข้อความ

"ถ้าทุกสิ่งสัมพันธ์กับตัวเองแล้วทุกสิ่งสัมพันธ์กัน"

กลายเป็นสัจนิรันดร์ได้ การเขียนพิสูจน์ที่ถูกต้องของตรรกบทนี้ควรเป็นดังนี้

1. (∀x)(Pxx)
2. Pxx
3. . . . .

หรือตัวอย่างการพิสูจน์ที่ผิดพลาดต่อไปนี้

1. (∀x)(∃y)(Pxy)
2. (∃y)(Pyy) (1, U.I.) * *ผิด เพราะใช้ตัวแปร y ของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณอื่นคือ* (∃y)(Pxy)

อาจทำให้ข้อความเป็นเท็จ เช่น

"ถ้าทุกคนมีแม่แล้วมีบางคนที่เป็นแม่ของตัวเอง"

เป็นสัจนิรันดร์ได้ การเขียนพิสูจน์ที่ถูกต้องของตรรกบทนี้ควรเป็นดังนี้

1. (∀x)(∃y)(Pxy)
2. (∃y)(Pxy) (1, U.I.)
3. . . . .

2 . ข้อควรระวังสำหรับกฎ U.G.

"เราจะคืนปริมาณทั้งหมดกับตัวแปรที่ถูกเลือกแบบไม่เจาะจงเท่านั้น แต่ต้องไม่เป็นตัวแปรของตัวบ่งปริมาณอื่นอยู่ก่อน "

ตัวอย่างเช่นไม่ควรเขียนการพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องต่อไปนี้

1. $(\exists x)(Px)$
2. Pa (1, E.I.)
3. $(\forall x)(Px)$ (2, U.G.) * *ผิด เพราะ a ใน Pa เป็นตัวคงที่*

เพราะความผิดพลาดนี้เป็นการพิสูจน์ข้อความไม่จริง เช่น

"ถ้ามีคนผมยาวแล้วทุกคนผมยาว"

ให้เป็นข้อความที่เป็นจริงได้

หรือไม่ควรเขียนการพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องต่อไปนี้

1. $(\exists y)(Pyy)$
2. $(\forall x)(\exists y)(Pxy)$ (1, U.I.) * *ผิด เพราะใช้ตัวแปร y ของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ* $(\exists y)(Pyy)$

เพราะความผิดพลาดนี้เป็นการพิสูจน์ข้อความที่ไม่เป็นจริง เช่น

"ถ้ามีคนที่มีน้ำหนักเท่ากับตนเองแล้วคนทุกคนจะมีคนอื่นที่มีน้ำหนักเท่ากัน"

ให้เป็นข้อความที่เป็นจริงได้

3 . ข้อควรระวังสำหรับกฎ E.I.

"*ต้องแทนตัวแปร x ทุกแห่งในข้อความ ด้วยตัวคงที่ ที่<u>ไม่เคย</u>ปรากฏในข้อความใดมาก่อนหน้านี้*"

ตัวอย่างเช่นไม่ควรเขียนการพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องต่อไปนี้

1. $(\exists x)(\forall y)(Pxy)$
2. $(\forall y)(Pyy)$ * *ผิด เพราะใช้ตัวแปร y ของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ* $(\forall y)(Pxy)$

เป็นต้น

4 . ข้อควรระวังสำหรับกฎ E.G.

"ต้องไม่แทนตัวคงที่ด้วยตัวแปรหรือตัวคงที่ของตัวบ่งปริมาณอื่นที่อยู่ในข้อความเดิม"
เช่นตัวอย่างการพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องต่อไปนี้

1. $(\forall x)(\exists y)(Pxy)$
2. $(\exists y)(Pxy)$ (1, U.I.)
3. Pxa (2, E.I.)
4. $(\exists x)(Pxx)$ * *ผิด*

การเขียนการพิสูจน์ผิดที่ข้อ 4 เพราะตัวคงที่ a อาจไม่ใช่ x ในกรณีเช่นนี้เราต้องใช้ตัวแปร y สำหรับ a แล้วเพิ่มตัวบ่งปริมาณ "∃" อีกหนึ่งตัวเป็น

4′. $(\exists y)(\exists x)(Pxy)$

หรือตัวอย่างการเขียนการพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องต่อไปนี้

1. $(\exists x)(\forall y)(Pxy)$
2. $(\forall y)(Pay)$ (1, E.I.)
3. $(\exists y)(\forall y)(Pyy)$ * ผิด

เป็นต้น

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่ชี้ให้เห็นข้อผิดพลาดของการใช้กฎของตัวบ่งปริมาณอย่างไม่ระมัดระวัง

ตัวอย่าง 5 :

1. $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$ / ∴ $(\forall x)(Fx)$
2. $Fx \wedge Gy$ * *ผิด เพราะแทนตัวแปร x ด้วยกฎ E.I. ไม่ครบทุกแห่ง*
3. Fx (2, Simp.)
4. $(\forall x)(Fx)$ * *ผิด เพราะตัวแปร x ถูกใช้ในข้อ 2 ด้วยกฎ E.I. ในลักษณะเฉพาะไปแล้ว*

ตัวอย่าง 6 :

1. $(\forall x)(\exists y)(Fx \leftrightarrow \neg Fy)$ / $\therefore$ $(\exists x)(Fx \leftrightarrow \neg Fx)$
2. $(\exists y)(Fx \leftrightarrow \neg Fy)$ (1, U.I.)
3. $Fx \leftrightarrow \neg Fx$ * *ผิดเพราะตัวแปร x ถูกใช้ในข้อ 2 ด้วยกฎ U.I. ในลักษณะไม่เจาะจง แต่กฎ E.I. ที่จะใช้ในข้อ 3 ต้องเป็นตัวคงที่ที่ไม่ควรเป็น x*
4. $(\exists x)(Fx \leftrightarrow \neg Fx)$ (3, E.G.)

ตัวอย่าง 7 :

1. $(\forall x)(\exists y)(Fx \leftrightarrow Gy)$ / $\therefore$ $(\exists y)(\forall x)(Fx \leftrightarrow Gy)$
2. $(\exists y)(Fx \leftrightarrow Gy)$ (1, U.I.)
3. $Fx \leftrightarrow Gy$ (2, E.I.)
4. $(\forall x)(Fx \leftrightarrow Gy)$ (3, U.G.) **ผิด เพราะตัวแปร x ในข้อ 3 ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อตัวคงที่ y ถูกเลือกอย่างเจาะจงให้กับ x ตัวนี้*
5. $(\exists y)(\forall x)(Fx \leftrightarrow Gy)$ (4. E.G.)

ตัวอย่าง 8 :

1. $(\exists x)(\forall y)[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hy]$ / $\therefore$ $(\exists x)[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$
2. $(\forall y)[Fz \wedge Gz) \rightarrow Hy$ (1, E.I.)
3. $(Fz \wedge Gz) \rightarrow Hy$ (2, U.I.)
4. $(\exists x)[(Fx \wedge Gz \rightarrow Hy]$ (3, E.G.) * *ผิด เพราะแทนตัวแปร x ด้วยกฎ E.G. ในข้อ 3 ไม่ครบทุกแห่ง*
5. $(\forall y)(\exists x)[(Fx \wedge Gy) \rightarrow Hy]$ (4, U.G.) * *ผิด เพราะแทนตัวแปร y ด้วยกฎ U.G. กับตัวแปร z และ y ที่ต่างกันในข้อ 4*
6. $(\exists x)[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$ (5, U.I.)

แบบฝึกหัด 2

จงบอกและอธิบายว่าบรรทัดใดของการพิสูจน์ในข้อต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. 1. Fx
   2. $(\forall y)(Fy)$ (1, U.G.)
   3. $Fx \rightarrow (\forall y)(Fy)$ (1, 2, C.P.)
   4. $(\forall x)[Fx \rightarrow (\forall y)(Fy)]$ (3, U.G.)

2. 1. $(\forall x)(\exists y)(Fx \rightarrow Gy)$ / $\therefore$ $(\exists y)(\forall x)(Fx \rightarrow Gy)$
   2. $(\exists y)(Fx \rightarrow Gy)$ (1, U.I.)
   3. $Fx \rightarrow Gx$ (2, E.I.)
   4. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$ (3, U.G.)
   5. $(\exists y)(\forall x)(Fx \rightarrow Gy)$ (4, E.G.)

3. 1. $(\forall y)(\exists x)(Fx \vee Gy)$ / $\therefore$ $(\exists x)(\forall y)(Fx \vee Gy)$
   2. $(\exists x)(Fx \vee Gy)$ (1, U.I.)
   3. $Fx \vee Gx$ (2, E.I.)
   4. $(\forall y)(Fx \vee Gy)$ (3, U.G.)
   5. $(\exists x)(\forall y)(Fx \vee Gy)$ (4, E.G.)

4. 1. $(\exists x)(Fx)$
   2. $(\exists x)(Gx)$ / $\therefore$ $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$
   3. Fy (1, E.I.)
   4. Gy (2, E.I.)
   5. $Fy \wedge Gy$ (3, 4, Conj.)
   6. $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$ (5, E.G.)

5. 1. $(\exists x)(\exists y)[(Fx \vee Gy) \wedge Hy]$ / $\therefore$ $(\forall x)(\forall y)(Fy \vee Gx)$
   2. $(\exists y)[(Fx \vee Gy) \wedge Hy]$ (1, E.I.)
   3. $(Fx \vee Gx) \wedge Hx$ (2, E.I.)
   4. $Fx \vee Gx$ (3, Simp.)

5. $(\forall y)(Fy \vee Gy)$ (4, U.G.)

6. $(\forall x)(\forall y)(Fy \vee Gx)$ (5, U.G.)

6. 1. $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$

2. $(\exists x)(\neg Fx \wedge Gx)$ / $\therefore$ $(\exists x)(Fx \wedge \neg Fx)$

3. $Fx \wedge Gy$ (1, E.I.)

4. Fx (3, Simp.)

5. $\neg Fx \wedge Gx$ (2, E.I.)

6. $\neg Fx$ (5, Simp.)

7. $Fx \wedge \neg Fx$ (4, 6, Conj.)

8. $(\exists x)(Fx \wedge \neg Fx)$ (7, E.G.)

7. 1. $(\exists x)(Vx) \rightarrow (\forall y)[(Uy \vee Vy) \rightarrow Wy]$

2. $(\exists x)(Ux) \wedge (\exists x)(Wx)$ / $\therefore$ $(\exists x)(Ux \wedge Wx)$

3. $(\exists x)(Ux)$ (2, Simp.)

4. $(\forall y)[(Uy \vee Vy) \rightarrow Wy]$ (1, 3, M.P.)

5. $Ua \vee Va \rightarrow Wa$ (4, U.I.)

6. Ua (3, E.I.)

7. $Ua \vee Va$ (6, Add.)

8. Wa (5, 7, M.P.)

9. $Ua \wedge Wa$ (6, 8, Conj.)

10. $(\exists x)(Ux \wedge Wx)$ (9, E.G.)

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการใช้กฎทั้งสี่ ร่วมกับกฎการอ้างอิง และกฎการแทนที่ ในการพิสูจน์ตรรกบท ซึ่งประกอบด้วยข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่าง 9 :

1. $(\forall x)[(Fx \vee Sx) \rightarrow (Ix \wedge Wx)]$ / $\therefore$ $(\forall x)(Fx \rightarrow Ix)$

2. ให้ y เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง

3. Fy (C.P.)

4. $Fy \vee Sy \rightarrow Iy \wedge Wy$ (1, U.I.)

5. $Fy \vee Sy$ (3, Add.)

6. $Iy \wedge Wy$ (4, 5, M.P.)

7. Iy (6, Simp.)

8. $Fy \rightarrow Iy$ (3-7, C.P.)

9. $(\forall x)(Fx \rightarrow Ix)$ (2, 8, U.G.)

ตัวอย่าง 10 :

1. $(\forall x)[(Ax \vee Bx) \rightarrow (Cx \wedge Dx)]$

2. $(\forall x)\{(Cx \vee Ex) \rightarrow [(Fx \vee Gx) \rightarrow Hx]\}$ / $\therefore$ $(\forall x)[Ax \rightarrow (Fx \rightarrow Hx)]$

3. ให้ y เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง

4. $Ay \vee By \rightarrow Cy \wedge Dy$ (1, U.I.)

5. $Cy \vee Ey \rightarrow [(Fy \vee Gy) \rightarrow Hy]$ (2, U.I.)

6. Ay (C.P.)

7. $Ay \vee By$ (6, Add.)

8. $Cy \wedge Dy$ (4, 7, M.P.)

9. Cy (8, Simp.)

10. $Cy \vee Ey$ (9, Add.)

11. $(Fy \vee Gy) \rightarrow Hy$ (5, 10, M.P.)

12. Fy (C.P.)

13. $Fy \vee Gy$ (12, Add.)

14. Hy (11, 13, M.P.)

15. $Fy \rightarrow Hy$ (12-14, C.P.)

16. $Ay \rightarrow (Fy \rightarrow Hy)$ (6-15, C.P.)

17. $(\forall x)(Ax \rightarrow (Fx \rightarrow Hx))$ (3, 16, U.G.)

ตัวอย่าง 11 :

1. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$
2. $(\exists y)(Fy)$ / $\therefore$ $(\exists x)(Gx)$
3. Fu (2, E.I. โดยที่ u เป็นตัวคงที่)
4. $Fu \rightarrow Gu$ (1, U.I.)
5. Gu (3, 4, M.P.)
6. $(\exists x)(Gx)$ (5, E.G.)

ตัวอย่าง 12 :

1. $(\forall x)(Hx \rightarrow Mx)$ / $\therefore$ $Hs \rightarrow (\exists x)(Hx \wedge Mx)$
2. Hs (C.P.)
3. $Hs \rightarrow Ms$ (1, U.I.)
4. Ms (2, 3, M.P.)
5. $Hs \wedge Ms$ (2, 4, Conj.)
6. $(\exists x)(Hx \wedge Mx)$ (5, E.G.)
7. $Hs \rightarrow (\exists x)(Hx \wedge Mx)$ (2 - 6 , C.P.)

ตัวอย่าง 13 :

1. $(\forall x)[Ex \rightarrow (\forall y)(Fy \rightarrow Gxy)]$
2. $(\exists x)[Ex \wedge (\exists y)(\neg Gxy)]$ / $\therefore$ $(\exists x)(\neg Fx)$
3. $Ea \wedge (\exists y)(\neg Gay)$ (2, E.I. ให้ a เป็นตัวคงที่)
4. $Ea \rightarrow (\forall y)(Fy \rightarrow Gay)$ (1, U.I.)
5. Ea (3, Simp.)
6. $(\forall y)(Fy \rightarrow Gay)$ (4, 5, M.P.)
7. $(\exists y)(\neg Gay)$ (3, Simp.)
8. $\neg Gab$ (7, E.I. ให้ b เป็นตัวคงที่อีกตัวหนึ่ง)
9. $Fb \rightarrow Gab$ (6, U.I.)
10. $\neg Fb$ (8, 9, M.T.)

11. $(\exists x)(\neg Fx)$ (10, E.G.)

ตัวอย่าง 14 :

1. $(\exists x)(\forall y)[(\exists z)(Ayz) \rightarrow Ayx]$
2. $(\forall y)(\exists z)(Ayz)$ / $\therefore$ $(\exists x)(\forall y)(Ayx)$
3. ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง
4. $(\forall y)[(\exists z)(Ayz) \rightarrow Aya]$ (1, E.I. ให้ a เป็นตัวคงที่)
5. $(\exists z)(Auz) \rightarrow Aua$ (4, U.I.)
6. $(\exists z)(Auz)$ (2, U.I.)
7. Aua (5, 6, M.P.)
8. $(\forall y)(Aya)$ (3, 7, U.G.)
9. $(\exists x)(\forall y)(Ayx)$ (8, E.G.)

ตัวอย่าง 15 :

1. $(\forall x)[Cax \rightarrow Dxb]$
2. $(\exists x)(Dxb) \rightarrow (\exists y)(Dby)$ / $\therefore$ $(\exists x)(Cax) \rightarrow (\exists y)(Dby)$
3. $(\exists x)(Cax)$ (C.P.)
4. Cap (3, E.I. ให้ p เป็นตัวคงที่)
5. $Cap \rightarrow Dpb$ (1, U.I.)
6. Dpb (4, 5, M.P.)
7. $(\exists x)(Dxb)$ (5, E.G.)
8. $(\exists y)(Dby)$ (2, 7, M.P.)
9. $(\exists x)(Cax) \rightarrow (\exists y)(Dby)$ (3-8, C.P.)

ตัวอย่าง 16 :

1. $(\forall x)[(\exists y)(Byx) \rightarrow (\forall z)(Bxz)]$ / ∴ $(\forall y)(\forall z)(Byz \rightarrow Bzy)$
2. ให้ u และ t เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง
3. But (C.P.)
4. $(\exists y)(Byt) \rightarrow (\forall z)(Btz)$ (1, U.I.)
5. $(\exists y)(Byt)$ (3, E.G.)
6. $(\forall z)(Btz)$ (4, 5, M.P.)
7. Btu (6, U.I.)
8. But → Btu (3-7, C.P.)
9. $(\forall z)(Buz \rightarrow Bzu)$ (2, 8, U.G.)
10. $(\forall y)(\forall z)(Byz \rightarrow Bzy)$ (9, U.G.)

แบบฝึกหัด 3

จงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของตรรกบทในข้อต่อไปนี้

1. $(\forall x)(Cx \rightarrow Dx)$
   $(\forall x)(Ex \rightarrow \neg Dx)$
   ∴ $(\forall x)(Ex \rightarrow \neg Cx)$

2. $(\forall x)(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   $(\exists x)(Hx \wedge Gx)$
   ∴ $(\exists x)(Hx \wedge \neg Fx)$

3. $(\forall x)(Kx \rightarrow Lx)$
   $(\forall x)[(Kx \wedge Lx) \rightarrow Mx]$
   ∴ $(\forall x)(Kx \rightarrow Mx)$

4. $(\forall x)(Nx \rightarrow Ox)$
   $(\forall x)(Px \rightarrow Ox)$
   ∴ $(\forall x)[(Nx \vee Px) \rightarrow Ox]$

5. $(\forall x)(Qx \rightarrow Rx)$
   $(\exists x)(Qx \vee Rx)$
   ∴ $(\exists x)(Rx)$

6. $(\forall x)[Sx \rightarrow (Tx \rightarrow Ux)]$
   $(\forall x)[Ux \rightarrow (Vx \wedge Wx)]$
   ∴ $(\forall x)[Sx \rightarrow (Tx \rightarrow Vx)]$

7. $(\exists x)(Jx) \vee (\exists y)(Ky)$
   $(\forall x)(Jx \rightarrow Kx)$
   ∴ $(\exists y)(Ky)$

8. $(\forall x)(Lx \rightarrow Mx)$
   $(\forall x)(Mx \rightarrow Nx)$
   ∴ $(\exists x)(Lx) \rightarrow (\exists y)(Ny)$

9. $(\exists x)(Ux) \rightarrow (\forall y)[(Uy \vee Vy) \rightarrow Wy]$

$(\exists x)(Ux) \wedge (\exists x)(Wx)$

$\therefore\ (\exists x)(Ux \wedge Wx)$

10. $(\exists x)(Xx) \rightarrow (\forall y)(Yy \rightarrow Zy)$

$\therefore\ (\exists x)(Xx \wedge Yx) \rightarrow (\exists y)(Xy \wedge Zy)$

11. $(\forall x)[(Xx \vee Yx) \rightarrow (Zx \wedge Ax)]$

$(\forall x)[(Zx \vee Ax) \rightarrow (Xx \wedge Yx)]$

$\therefore\ (\forall x)(Xx \leftrightarrow Zx)$

12. $(\forall x)[(Bx \rightarrow Cx) \wedge (Dx \rightarrow Ex)]$

$(\forall x)[(Cx \vee Dx) \rightarrow \{[Fx \rightarrow (Gx \rightarrow Fx)] \rightarrow (Bx \wedge Dx)\}]$

$\therefore\ (\forall x)(Bx \leftrightarrow Dx)$

13. $(\exists x)(\forall y)[(\exists z)(Pyz) \rightarrow Pyx]$

$(\forall y)(\exists z)(Pyz)$

$\therefore\ (\exists x)(\forall y)(Pyx)$

14. $(\forall x)(Aax \rightarrow Bxb)$

$(\exists x)(Bxb) \rightarrow (\exists y)(Bby)$

$\therefore\ (\exists x)(Aax) \rightarrow (\exists y)(Bby)$

15. $(\forall x)[Px \rightarrow (\forall y)(Qy \rightarrow Rxy)]$

$(\exists x)[Px \wedge (\exists y)(\neg Rxy)]$

$\therefore\ (\exists x)(\neg Qx)$

16. $(\forall x)[Px \rightarrow \{(\exists y)(Lxy) \rightarrow (\exists z)(Lzx)\}]$

$(\forall x)[(\exists z)(Lzx \rightarrow Lxx)]$

$\neg (\exists x)(Lxx)$

$\therefore\ (\forall x)[Px \rightarrow (\forall y)(\neg Lxy)]$

17. $(\forall x)[(Ax \wedge \neg Bx) \rightarrow (\exists y)(Txy \wedge Ry)]$

$(\exists x)[Sx \wedge Ax \wedge (\forall y)(Txy \rightarrow Sy)]$

$(\forall x)(Sx \rightarrow \neg Bx)$

$\therefore (\exists x)(Rx \wedge Sx)$

18. แขกผู้มาในงานแต่ละคนจะสนุกสนานเต็มที่จริงๆ หรือมีบางคนแสร้งทำในสิ่งที่ไม่ตรงกับใจ บุคคลผู้มีความจริงใจย่อมไม่แสร้งทำในสิ่งที่ไม่ตรงกับใจ เพราะฉะนั้นถ้าแขกทุกคนที่มาในงานเป็นผู้มีความจริงใจ แล้วทุกคนจะสนุกสนานเต็มที่จริงๆ [Ex : x สนุกสนานเต็มที่จริงๆ ; Cx : x แสร้งทำในสิ่งที่ไม่ตรงกับใจ ; Hx : x เป็นผู้มีความจริงใจ]

19. คนบางคนคลั่งไคล้เอลวิส คนบางคนไม่ชอบคนที่คลั่งไคล้เอลวิส ดังนั้นคนบางคนไม่ชอบคนบางคน [Mx : x เป็นคน ; Ex : x คลั่งไคล้เอลวิส ; Lxy : x ชอบ y]

20. ไม่มีนักการเมืองคนใดชอบทหาร คนขับรถถังทุกคนเป็นทหาร ดังนั้นไม่มีนักการเมืองคนใดชอบคนขับรถถัง [Px : x เป็นนักการเมือง ; Sx : x เป็นทหาร ; Tx : x ขับรถถัง ; Lxy : x ชอบ y]

21. ไม่มีใครนับถือคนที่ไม่นับถือตนเอง ไม่มีใครเชื่อฟังคนที่เขาไม่นับถือ ดังนั้นคนที่ไม่นับถือใครย่อมไม่มีผู้ใดเชื่อฟังเขา [Mx : x เป็นคน ; Rxy : x นับถือ y ; Bxy : x เชื่อฟัง y]

22. จำนวนอนันต์มีค่ามากกว่าจำนวนจริงทุกจำนวน ไม่มีจำนวนจริงใดที่มีค่ามากกว่าตัวเอง ดังนั้นจำนวนอนันต์ไม่ใช่จำนวนจริง [i : จำนวนอนันต์ ; Rx : x เป็นจำนวนจริง ; Gxy : x มีค่ามากกว่า y]

3 . 6 การพิสูจน์ความไม่สมเหตุสมผล

ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.8 ของบทที่ 2 ว่าเราสามารถแสดงความไม่สมเหตุสมผลของตรรกบทได้ด้วยการสร้างตารางค่าความจริงบรรทัดเดียว หรือนั่นคือแสดงกรณีที่ข้อกำหนดเป็นจริงทั้งหมดแต่ข้อสรุปเป็นเท็จ แต่เนื่องจากค่าความจริงของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณขึ้นอยู่กับโดเมนหรือเอกภพ และข้อความสมมูลต่อไปนี้

$(\exists x)(Px) \equiv (\forall x)(Px) \equiv Pa$ (เมื่อเอกภพประกอบด้วยสมาชิก 1 ตัว)

$(\forall x)(Px) \equiv Pa \wedge Pb$

และ $(\exists x)(Px) \equiv Pa \vee Pb$ (เมื่อเอกภพประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว)

. . . . . .

$(\forall x)(Px) \equiv Pa \wedge Pb \wedge Pc \wedge \ldots \wedge \ldots$

และ $(\exists x)(Px) \equiv Pa \vee Pb \vee Pc \vee \ldots \vee \ldots$ (เมื่อเอกภพประกอบด้วยสมาชิก n ตัว)

ดังนั้นตรรกบทที่มีตัวบ่งปริมาณจะสมเหตุสมผล ก็ต่อเมื่อตรรกบทนั้นๆสมเหตุสมผลในทุกๆเอกภพ ซึ่งเรามีวิธีการพิสูจน์ด้วยกฎของการบ่งปริมาณดังกล่าวแล้วในหัวข้อก่อน แต่ตรรกบทที่มีตัวบ่งปริมาณจะไม่สมเหตุสมผลถ้ามีอย่างน้อยเอกภพหนึ่งที่เราสามารถสร้างตารางค่าความจริงบรรทัดเดียวในเอกภพนั้นได้ ดังจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 : ตรรกบท

$$\begin{array}{l} (\forall x)(Wx \rightarrow Hx) \\ (\forall x)(Ex \rightarrow Hx) \\ \hline \therefore\ (\forall x)(Wx \rightarrow Ex) \end{array}$$

ไม่สมเหตุสมผลแม้ในเอกภพที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงตัวเดียว เช่นในเอกภพ $D = \{a\}$ เราจะมีตรรกบท

$$\begin{array}{l} Wa \rightarrow Ha \\ Ea \rightarrow Ha \\ \hline \therefore\ Wa \rightarrow Ea \end{array}$$

ซึ่งไม่สมเหตุสมผล เนื่องจากเราสามารถสร้างตารางค่าความจริงบรรทัดเดียวได้ดังนี้

Wa	Ha	Ea	$Wa \rightarrow Ha$	$Ea \rightarrow Ha$	$Wa \rightarrow Ea$
T	T	F	T	T	F

ตัวอย่าง 2 : ตรรกบท

$$\begin{array}{l} (\forall x)(Wx \rightarrow Hx) \\ (\exists x)(Ex \wedge Hx) \\ \hline \therefore\ (\forall x)(Wx \rightarrow Ex) \end{array}$$

สมเหตุสมผลในเอกภพที่ประกอบด้วยสมาชิก 1 ตัว แต่สำหรับเอกภพที่ประกอบด้วยสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว $D = \{a, b, \ldots\}$ แล้วเราจะได้ตรรกบทในรูป

$$\begin{array}{l} (Wa \rightarrow Ha) \wedge (Wb \rightarrow Hb) \wedge \ldots \\ (Ea \wedge Ha) \vee (Eb \wedge Hb) \vee \ldots \\ \hline \therefore\ (Wa \rightarrow Ea) \wedge (Wb \rightarrow Eb) \wedge \ldots \end{array}$$

ซึ่งเราสามารถแสดงความไม่สมเหตุสมผลได้โดยการสร้างตารางค่าความจริงบรรทัดเดียวของกรณีที่ Ea เท่านั้นที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) แต่นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง (T)

ตัวอย่าง 3 : ตรรกบท

$$\begin{array}{l} (\exists x)(Dx \wedge Px) \\ (\exists x)(Dx \wedge Sx) \\ \hline \therefore\ (\exists x)(Px \wedge Sx) \end{array}$$

ก็เช่นกัน ความไม่สมเหตุสมผลเกิดขึ้นในเอกภพที่ประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว $D = \{a, b\}$ ซึ่งจะทำให้เราได้ตรรกบท

$$\begin{array}{l} (Da \wedge Pa) \vee (Db \wedge Pb) \\ (Da \wedge Sa) \vee (Db \wedge Sb) \\ \hline \therefore\ (Pa \wedge Sa) \vee (Pb \wedge Sb) \end{array}$$

ที่ไม่สมเหตุสมผลในกรณีที่กำหนดค่าความจริง T ให้กับ Da, Db, Pa และ Sb แต่กำหนดค่าความจริง F ให้กับ Pb และ Sa

ตัวอย่าง 4 : สำหรับตรรกบท

$$\begin{array}{l} (\exists x)(Ax \wedge Bx) \\ Ac \\ \hline \therefore\ Bc \end{array}$$

จะไม่สมเหตุสมผลถ้าเรากำหนดให้ a เป็นสมาชิกของเอกภพที่ต่างจาก c และให้ Aa, Ba และ Ac มีค่าความจริงเป็นจริง แต่ Bc เป็นเท็จ แล้วตรรกบท

$$\begin{array}{l} Aa \wedge Ba \\ Ac \\ \hline \therefore\ Bc \end{array}$$

จะไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 5 : พิจารณาตรรกบท

$$\begin{array}{l} (\forall x)(\exists y)(Pxy) \\ \hline \therefore\ (\exists y)(\forall x)(Pxy) \end{array}$$

ถ้าให้ $D = \{a, b\}$ แล้วจะได้ว่าตรรกบท

$$\begin{array}{l} (Paa \vee Pab) \wedge (Pba \wedge Pbb) \\ \hline \therefore\ (Paa \wedge Pba) \vee (Pab \wedge Pbb) \end{array}$$

ไม่สมเหตุสมผล เมื่อกำหนด Paa และ Pbb เป็นจริง แต่ Pab และ Pba เป็นเท็จ

แบบฝึกหัด 4

1. จงพิสูจน์ว่าแต่ละตรรกบทในข้อ 5 ของแบบฝึกหัด 1 สมเหตุสมผลหรือไม่
2. จงพิสูจน์ว่าตรรกบทในแต่ละข้อต่อไปนี้ไม่สมเหตุสมผล

2.1 $(\forall x)(Ex \rightarrow Fx)$
$(\forall x)(Gx \rightarrow Fx)$
$\therefore (\forall x)(Ex \rightarrow Gx)$

2.2 $(\forall x)(Hx \rightarrow \neg Ix)$
$(\exists x)(Jx \wedge \neg Ix)$
$\therefore (\forall x)(Hx \rightarrow Jx)$

2.3 $(\exists x)(Kx \wedge Lx)$
$(\exists x)(\neg Kx \wedge \neg Lx)$
$\therefore (\exists x)(Lx \wedge \neg Kx)$

2.4 $\neg (\exists x)(Ax \wedge Bx)$
$(\forall x)(Cx \rightarrow \neg Dx)$
$(\forall x)[Bx \rightarrow (Dx \vee \neg Ax)]$
$\therefore (\forall x)(Ax \rightarrow \neg Cx)$

2.5 $(\forall x)[Qx \rightarrow (Rx \wedge Sx)]$
$(\exists x)[Tx \wedge Rx]$
$(\exists x)[Tx \wedge \neg Sx]$
$\therefore (\forall x)[Qx \rightarrow Tx]$

2.6 $(\forall x)[Ux \rightarrow (Vx \rightarrow Wx)]$
$(\forall x)[Vx \rightarrow (Ux \rightarrow \neg Wx)]$
$(\exists x)[Ux \wedge Wx]$
$\therefore (\exists x)[Ux \wedge Vx]$

2.7 $(\exists x)[Xx \wedge Yx]$
$(\forall x)[Xx \rightarrow Zx]$
$(\exists x)[Zx \wedge \neg Xx]$
$\therefore (\exists x)[Zx \wedge \neg Yx]$

2.8 $(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]$
$(\exists x)[Cx \wedge Bx]$
$(\exists x)[Cx \wedge \neg Bx]$
$\therefore (\forall x)[Ax \rightarrow Cx]$

3. จงแสดงโดยการสร้างตัวอย่างหรือกำหนดเอกภพ เพื่อแสดงว่าตรรกบทในข้อต่อไปนี้ไม่สมเหตุสมผล

3.1 $(\exists x)(x \text{ is } F)$
$\therefore a \text{ is } F$

3.2 $\neg (\forall x)(x \text{ is } F)$
$\therefore (\forall x)[\neg (x \text{ is } F)]$

3.3 $(\exists x)(x \text{ is } F)$
$\therefore (\exists x)[\neg (x \text{ is } F)]$

3.4 $(\exists x)(x \text{ is } F \vee x \text{ is } G)$
$\therefore (\exists x)(x \text{ is } F)$

3.5 $(\forall x)(x \text{ is } F \rightarrow x \text{ is } G)$

$(\forall x)(x \text{ is } H \rightarrow x \text{ is } G)$

$\therefore (\forall x)(x \text{ is } F \rightarrow x \text{ is } H)$

3.6 $(\exists x)(x \text{ is } F) \wedge (\exists x)(x \text{ is } G)$

$\therefore (\exists x)(x \text{ is } F \wedge x \text{ is } G)$

3.7 $(\forall x)(x \text{ is } F) \wedge (\exists x)(x \text{ is } G)$

$\therefore (\forall x)(x \text{ is } G) \wedge (\exists x)(x \text{ is } F)$

3 . 7 สัจนิรันดร์ของการบ่งปริมาณ

สัจนิรันดร์คือข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริงในทุกกรณี ดังนั้นสัจนิรันดร์ของการบ่งปริมาณก็คือข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ หรือข้อความที่ประกอบด้วยข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณที่เป็นจริงเสมอหรือเป็นจริงในทุกเอกภพนั่นเอง และเนื่องจากประโยชน์ของสัจนิรันดร์ก็คือการนำไปใช้อ้างอิง หรือนำไปใช้แทนที่กันได้ในกรณีข้อความสมมูลกัน ในหัวข้อนี้จึงจะขอพิสูจน์สัจนิรันดร์ของการบ่งปริมาณที่สำคัญๆต่อไปนี้

1. ข้อความที่เกี่ยวกับนิเสธ

1.1 $\neg (\exists x)(Px) \equiv (\forall x)(\neg Px)$

1.2 $\neg (\forall x)(Px) \equiv (\exists x)(\neg Px)$

2. ข้อความที่เกี่ยวกับการสลับที่ของตัวบ่งปริมาณ

2.1 $(\forall x)(\forall y)(Pxy) \equiv (\forall y)(\forall x)(Pxy)$

2.2 $(\exists x)(\exists y)(Pxy) \equiv (\exists y)(\exists x)(Pxy)$

2.3 $(\forall x)(\forall y)(Pxy) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)(Pxy)$

2.4 $(\exists x)(\forall y)(Pxy) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)(Pxy)$

หมายเหตุ : จากตัวอย่าง 5 หัวข้อ 3.6 แสดงให้เห็นถึงตัวบ่งปริมาณบางกรณีที่ไม่อาจสลับที่กันได้

3. ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณรูปอื่นๆ

3.1 $(\forall x)(Fx) \wedge (\forall x)(Gx) \equiv (\forall x)(Fx \wedge Gx)$

3.2 $(\forall x)(Fx) \Rightarrow (\exists x)(Fx)$

3.3 $(\forall x)(Fx) \vee (\forall x)(Gx) \Rightarrow (\forall x)(Fx \vee Gx)$

3.4 $(\exists x)(Fx \wedge Gx) \Rightarrow [(\exists x)(Fx) \wedge (\exists x)(Gx)]$

4. ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณกับข้อความเชิงเดียว

4.1 $(\forall x)(Fx \wedge Q) \equiv (\forall x)(Fx) \wedge Q$

4.2 $(\forall x)(Q \rightarrow Fx) \equiv Q \rightarrow (\forall x)(Fx)$

4.3 $(\exists x)(Fx \wedge Q) \equiv (\exists x)(Fx) \wedge Q$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการพิสูจน์ข้อความข้างต้นบางข้อความ

ตัวอย่าง 1 : $(\forall x)(Fx) \wedge (\forall x)Gx) \equiv (\forall x)(Fx \wedge Gx)$

พิสูจน์ : ($\Rightarrow$)

1.	$(\forall x)(Fx) \wedge (\forall x)(Gx)$	(C.P.)
2.	ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
3.	$(\forall x)(Fx)$	(1, Simp.)
4.	Fu	(3, U.I.)
5.	$(\forall x)(Gx)$	(1, Simp.)
6.	Gu	(5, U.I.)
7.	$Fu \wedge Gu$	(4, 6, Conj.)
8.	$(\forall x)(Fx \wedge Gx)$	(2, 7, U.G.)

($\Leftarrow$)

1.	$(\forall x)(Fx \wedge Gx)$	(C.P.)
2.	ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
3.	$Fu \wedge Gu$	(1, U.I.)
4.	Fu	(3, Simp.)
5.	$(\forall x)(Fx)$	(2, 4, U.G.)
6.	Gu	(3, Simp.)
7.	$(\forall x)(Gx)$	(2, 6, U.G.)
8.	$(\forall x)(Fx) \wedge (\forall x)(Gx)$	(5, 7, Conj.)

ตัวอย่าง 2 : $(\forall x)(Fx \wedge Q) \equiv (\forall x)(Fx) \wedge Q$

พิสูจน์ : ($\Rightarrow$)

1. $(\forall x)(Fx \wedge Q)$	(C.P.)
2. ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
3. $Fu \wedge Q$	(1, U.I.)
4. Fu	(3, Simp.)
5. $(\forall x)(Fx)$	(2, 4, U.G.)
6. Q	(3, Simp.)
7. $(\forall x)(Fx) \wedge Q$	(5, 6, Conj.)

($\Leftarrow$)

1. $(\forall x)(Fx) \wedge Q$	(C.P.)
2. ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
3. $(\forall x)(Fx)$	(1, Simp.)
4. Fu	(3, U.I.)
5. Q	(1, Simp.)
6. $Fu \wedge Q$	(4, 5, Conj.)
7. $(\forall x)(Fx \wedge Q)$	(2, 6, U.G.)

ตัวอย่าง 3 : $(\forall x)(Q \rightarrow Fx) \equiv Q \rightarrow (\forall x)(Fx)$

พิสูจน์ : ($\Rightarrow$)

1. $(\forall x)(Q \rightarrow Fx)$	(C.P.)
2. ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
3. $Q \rightarrow Fu$	(1, U.I.)
4. Q	(C.P.)
5. Fu	(3, 4, M.P.)
6. $(\forall x)(Fx)$	(2, 5, U.G.)
7. $Q \rightarrow (\forall x)(Fx)$	(4-6, C.P.)

($\Leftarrow$)

1. $Q \rightarrow (\forall x)(Fx)$	(C.P.)
2. ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
3. Q	(C.P.)
4. $(\forall x)(Fx)$	(1, 3, M.P.)
5. Fu	(2, 4, U.I.)
6. $Q \rightarrow Fu$	(3-5, C.P.)
7. $(\forall x)(Q \rightarrow Fx)$	(2, 6, U.G.)

ตัวอย่าง 4 : $(\forall x)(Fx) \Rightarrow (\exists x)(Fx)$

พิสูจน์ :

1. $(\forall x)(Fx)$	(C.P.)
2. ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
3. Fu	(1, U.I.)
4. $(\exists x)(Fx)$	(3, E.G.)

ตัวอย่าง 5 : $(\forall x)(Fx) \vee (\forall x)(Gx) \Rightarrow (\forall x)(Fx \vee Gx)$

พิสูจน์ :

1.	$(\forall x)(Fx) \vee (\forall x)(Gx)$	(C.P.)
2.	$(\forall x)(Fx)$	(แยกกรณีพิจารณา)
3.	ให้ u เป็นตัวแทนที่ไม่เจาะจง	
4.	Fu	(2, U.I.)
5.	$Fu \vee Gu$	(4, Add.)
6.	$(\forall x)(Fx \vee Gx)$	(3, 5, U.G.)
7.	$(\forall x)(Fx) \rightarrow (\forall x)(Fx \vee Gx)$	(2-6, C.P.)
8.	$(\forall x)(Gx)$	(แยกกรณีพิจารณา)
9.	Gu	(8, U.I.)
10.	$Fu \vee Gu$	(9, Add.)
11.	$(\forall x)(Fx \vee Gx)$	(3, 10, U.G.)
12.	$(\forall x)(Gx) \rightarrow (\forall x)(Fx \vee Gx)$	(8-11, C.P.)
13.	$[(\forall x)(Fx) \rightarrow (\forall x)(Fx \vee Gx)] \wedge [(\forall x)(Gx) \rightarrow (\forall x)(Fx \vee Gx)]$	(7, 12, Conj.)
14.	$(\forall x)(Fx \vee Gx)$	(1, 13, C.D.)
15.	$[(\forall x)(Fx) \vee (\forall x)(Gx)] \Rightarrow (\forall x)(Fx \vee Gx)$	(1-14, C.P.)

หมายเหตุ : บทกลับของข้อความสัจนิรันดร์ในตัวอย่าง 5 ไม่เป็นจริง ตัวอย่างเช่น

ทุกคนผมสั้นหรือผมยาว ⇒ (ทุกคนผมสั้น) ∨ (ทุกคนผมยาว)

เป็นข้อความไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 6 : $(\exists x)(Fx \wedge Gx) \Rightarrow [(\exists x)(Fx) \wedge (\exists x)(Gx)]$

พิสูจน์ :

1.	$(\exists x)(Fx \wedge Gx)$	(C.P.)
2.	$Fa \wedge Ga$	(1, E.I.)
3.	Fa	(2, Simp.)

4. $(\exists x)(Fx)$	(3, E.G.)
5. Ga	(2, Simp.)
6. $(\exists x)(Gx)$	(5, E.G.)
7. $(\exists x)(Fx) \wedge (\exists x)(Gx)$	(4, 6, Conj.)

หมายเหตุ : บทกลับของข้อความสัจนิรันดร์ในตัวอย่าง 6 ก็ไม่เป็นจริง ตัวอย่างเช่นในห้องเรียนหนึ่ง นายแดงใส่แว่นตา และนางสาวดำผมยาว นอกนั้นผมสั้นและไม่ใส่แว่นตา เราจึงกล่าวได้ว่า

"มีคนใส่แว่นตา และมีคนผมยาว"

เป็นข้อความที่เป็นจริง แต่ข้อความ

"มีคนใส่แว่นตา และผมยาว"

อาจจะไม่เป็นจริง เป็นต้น

แบบฝึกหัด 5

1. จงพิสูจน์ว่าข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้สมมูลกัน

1.1 $(\forall x)(Fx \rightarrow Q) \equiv (\exists x)(Fx) \rightarrow Q$

1.2 $(\exists x)(Q \rightarrow Fx) \equiv Q \rightarrow (\exists x)(Fx)$

1.3 $(\exists x)(Fx \wedge Q) \equiv (\exists x)(Fx) \wedge Q$

1.4 $(\forall x)(Fx \vee Q) \equiv (\forall x)(Fx) \vee Q$

1.5 $(\exists x)(Fx \vee Q) \equiv (\exists x)(Fx) \vee Q$

1.6 $(\exists x)(Fx \rightarrow Q) \equiv (\forall x)(Fx) \rightarrow Q$

1.7 $(\exists x)(Fx) \vee (\exists x)(Gx) \equiv (\exists x)(Fx \vee Gx)$

1.8 $(\forall x)(\exists y)(Fx \wedge Gy) \equiv (\exists y)(\forall x)(Fx \wedge Gy)$

1.9 $(\forall x)(\exists y)(Fx \vee Gy) \equiv (\exists y)(\forall x)(Fx \vee Gy)$

2. จงพิสูจน์สัจนิรันดร์ในข้อต่อไปนี้

2.1 $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow [(\forall x)(Fx) \rightarrow (\forall x)(Gx)]$

2.2 $[(\exists x)(Fx) \rightarrow (\exists x)(Gx)] \Rightarrow (\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$

2.3 $(\forall y)[Fy \rightarrow (\exists x)(Fx)]$

2.4 $(\exists y)[(\exists x)(Fx) \rightarrow Fy]$

2.5 $(\forall x)(\exists y)(Fx \rightarrow Gy) \Rightarrow [(\forall x)(Fx) \rightarrow (\exists y)(Gy)]$

3 . 8 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ค่าความจริงของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ ขึ้นอยู่กับโดเมนหรือเอกภพดังกล่าวแล้วในหัวข้อ 3.3 ดังนั้นข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณจึงอาจอยู่ในรูป

$(\forall x \in D)(Px)$ หรือ $(\exists x \in D)(Px)$

เมื่อ D เป็นสัญลักษณ์แทนเอกภพของตัวแปร x

แต่ถ้าเอกภพของตัวแปร x คือเซตของจำนวนธรรมชาติ (ซึ่งในที่นี้เราจะเขียนแทนเซตนี้ด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{N}$) ข้อความที่กล่าวว่าแต่ละจำนวนธรรมชาติ x (หรือโดยมากนิยมใช้เป็นตัวแปร n) สอดคล้องภาคแสดง P จะอยู่ในรูป

$(\forall x \in \mathbf{N})(Px)$ หรือ $(\forall n \in \mathbf{N})(Pn)$ หรือ $(\forall n \in \mathbf{N})(P_n)$

ซึ่งถ้าข้อความนี้มีค่าความจริงเป็นจริง เราจะได้ข้อความ

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \qquad (1)$$

เป็นจริง หรือนั่นคือ

$$P_1 \text{ เป็นจริง }, P_2 \text{ เป็นจริง }, \ldots \qquad (2)$$

แต่โดยสัจพจน์ของเปอาโน (หัวข้อ1.5) ทำให้เราทราบคุณสมบัติของเซตของจำนวนธรรมชาติว่าจะมี 1 เป็นสมาชิกตัวแรกหรือตัวตั้งต้น (สัจพจน์ 3) และแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะมีจำนวนธรรมชาติตัวถัดไป n+1 (สัจพจน์ 1) และโดยเฉพาะอย่างยิ่งสัจพจน์ 5 ทำให้เรากล่าวได้ว่า ตรรกบท

$$\frac{\begin{array}{l} P_1 \\ (\forall n \in \mathbf{N})(P_n \rightarrow P_{n+1}) \end{array}}{\therefore\ (\forall n \in \mathbf{N})(P_n)} \qquad (3)$$

หรือการอนุมาน

$$[P_1 \wedge (\forall n \in \mathbf{N})(P_n \rightarrow P_{n+1})] \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N})(P_n) \qquad (4)$$

สมเหตุสมผล ทั้งนี้เพราะจากข้อกำหนดจะทำให้เราได้ตรรกบทที่สมเหตุสมผลย่อยๆจำนวนนับไม่ถ้วนต่อไปนี้

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_1 \rightarrow P_2 \\ \hline \therefore P_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} P_2 \\ P_2 \rightarrow P_3 \\ \hline \therefore P_3 \end{array} \quad , \quad \ldots$$

$$\begin{array}{l} P_n \\ P_n \rightarrow P_{n+1} \\ \hline \therefore P_{n+1} \end{array} \quad , \quad \ldots\ldots$$

ซึ่งทำให้เราสรุปได้ว่าข้อความ (1) และ (2) ข้างต้นเป็นจริง และนั่นคือข้อสรุปของตรรกบทหรือการอนุมาน (4) ข้างต้นเป็นจริงด้วย

เราเรียกวิธีการที่จะพิสูจน์ว่าข้อความ $(\forall n \in \mathbf{N})(P_n)$ เป็นจริงโดยการแสดงว่ากลุ่มของข้อกำหนดของตรรกบท (3) ข้างต้นเป็นจริงว่า *วิธีการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Proof by Mathematical Induction)* หรือ *อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)*

ข้อสังเกต : ขอให้สังเกตว่า แม้ว่าการพิสูจน์โดยวิธีนี้จะใช้ชื่อว่าการพิสูจน์โดยอุปนัยวิธีก็ตาม แต่ก็ยังคงเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัยดังกล่าวข้างต้น ซึ่งจะไม่ใช่อุปนัยวิธีดังเช่นการสรุปจากประสบการณ์ของการทดลองทางวิทยาศาสตร์อื่นๆ

สำหรับตัวอย่างการพิสูจน์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แสดงไว้บ้างแล้วในบทที่ 1 (หัวข้อ 1.5) และจะแสดงให้เห็นต่อไปในบทที่ 4

แบบฝึกหัด 6

กำหนดให้ $\mathbf{N}$ แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ

$\mathbf{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

จงใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความในข้อต่อไปนี้

1. $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N})(x > 1 \Rightarrow x^n > x^{n-1})$
2. $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N})(0 < x < 1 \Rightarrow x^n < x^{n-1})$
3. $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N})(\log(x)^n = n \log x)$
4. $(\forall n \in \mathbf{N})[1+2+3+ \ldots +n = \frac{n(n+1)}{2}]$
5. $(\forall n \in \mathbf{N})[1^2+2^2+ \ldots +n^2 = \frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1)]$
6. $(\forall n \in \mathbf{N})[1^3+2^3+3^3+ \ldots n^3 = (1+2+ \ldots +n)^2]$

บทที่ 4

ตัวอย่างการพิสูจน์เชิงเนื้อหา

ดังที่กล่าวแล้วในบทที่ 1 ว่า การศึกษาวิชาทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้องและไม่ก่อให้เกิดปัญหาขัดแย้งกันเอง จำเป็นต้องศึกษาในรูปของระบบสัจพจน์ภายใต้กฎของตรรกศาสตร์ แต่เนื่องจากแขนงต่างๆของคณิตศาสตร์อยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีเซต ดังนั้นหากได้ศึกษาทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีเซตในเชิงระบบสัจพจน์แล้ว ก็ถือได้ว่าเราได้ศึกษาทุกแขนงของคณิตศาสตร์ ในรูประบบสัจพจน์

ในบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงสัจพจน์ของเปอาโน อันเป็นสัจพจน์ของทฤษฎีจำนวนไว้แล้ว สำหรับสัจพจน์ของทฤษฎีเซตก็ได้ถูกเขียนหรือกำหนดขึ้นโดยยึดเอาทฤษฎีเซตเบื้องต้นที่มักเป็นบทนำของทุกเรื่องราวทางคณิตศาสตร์เป็นหลัก (ทั้งนี้เพราะทฤษฎีเซตเบื้องต้นเหล่านั้นกำเนิดขึ้น จนกระทั่งเกิดปัญหาขัดแย้งกันในทฤษฎีเซตจึงมีนักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งช่วยกันสร้างระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซตขึ้นเพื่อให้ทฤษฎีเซตเบื้องต้นเหล่านั้นอยู่ในระบบที่มีความสอดคล้องกันและสำหรับผู้สนใจเรื่องราวการกำหนดสัจพจน์ของทฤษฎีเซต สามารถอ่านได้จาก [14]) เพราะฉะนั้นทฤษฎีเซตเบื้องต้นเหล่านั้น จึงถือได้ว่าเป็นสิ่งที่ยอมรับกันและนำมากล่าวอ้างเป็นสมมติฐานได้

ในบทนี้จึงไม่ขอกล่าวรายละเอียดของสัจพจน์ของทั้งสองระบบ แต่จะถือว่าเราได้อยู่บนรากฐานของระบบสัจพจน์ทั้งสองแล้ว และจะแสดงวิธีการศึกษาคณิตศาสตร์ด้วยการเน้นให้เข้าใจความหมายจากการอ่านบทนิยามและวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง โดยจะขอยกเอาเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เฉพาะส่วนที่เป็นพื้นฐานซึ่งจะสามารถนำไปเสริมการศึกษารายวิชาทางคณิตศาสตร์อื่นๆต่อไปพอเป็นสังเขป เพื่อให้เห็นตัวอย่างและเข้าใจลักษณะวิธีการพิสูจน์ อนึ่งเนื่องจากรายวิชานี้มุ่งเน้นให้นักศึกษามีทักษะในการพิสูจน์และสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ เนื้อหาสาระของบทนี้จึงเป็นไปในลักษณะสรุป แต่จะเน้นตัวอย่างการพิสูจน์ และการทำแบบฝึกหัด

4 . 1 บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซต

4 . 1 . 1 คุณสมบัติทั่วไปของเซต

เราทุกคนคุ้นเคยกับ "เซต" เป็นอย่างดีจนกระทั่งนักคณิตศาสตร์ถือว่า "เซต" (set) เป็นคำอนิยามที่ให้ความหมายตรงกันถึงการรวมกันอยู่ของสิ่งต่างๆที่เรียกกันว่า "สมาชิกของเซต" โดยยินยอมให้สมาชิกของเซตเป็นเซตได้ที่เราเรียกกันว่า "เซตของเซต" เราใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเซต และแทนสมาชิกของเซตด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก ถ้า x เป็นสมาชิกของ A เราจะเขียนแทนข้อความนี้ด้วยสัญลักษณ์ "$x \in A$" ในทางกลับกัน ถ้า x ไม่เป็นสมาชิกของ A เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$x \notin A$"

เซตอาจมีสมาชิกได้จำนวนไม่จำกัดเช่นเซตของจำนวนเต็ม เซตเช่นนี้เราเรียกว่า *เซตอนันต์ (infinite set)* หรือเซตอาจไม่มีสมาชิกเลยก็ได้ที่เรียกกันว่า *เซตว่าง (empty set)* และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "ϕ" เซตที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด หรือ *เซตจำกัด (finite set)* เป็นเซตที่เราสามารถนับจำนวนสมาชิกได้เป็นจำนวนนับ ถ้าเซต A และ B มีสมาชิกชุดเดียวกันเราจะกล่าวว่า A และ B เป็นเซตเดียวกัน และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$A = B$" ดังนั้นความหมายของสัญลักษณ์นี้ในรูปข้อความทางคณิตศาสตร์ ก็คือ

$$A = B \equiv (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

ถ้าทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

เราจะกล่าวว่า A เป็น*สับเซต (subset)* ของ B และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$A \subseteq B$" เพราะฉะนั้น

$$A \subseteq B \equiv (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

เนื่องจากข้อความ

$$x \in \phi \rightarrow x \in A$$

เป็นจริงสำหรับทุกๆ x และทุกๆเซต A เราจึงได้ว่าข้อความ

$$(\forall A)(\forall x)(x \in \phi \rightarrow x \in A)$$

เป็นจริง ซึ่งแสดงว่า $\phi \subseteq A$ สำหรับทุกๆเซต A

เซตของสับเซตทั้งหมดของเซต A ถูกเรียกว่า *เซตชี้กำลัง(power set)* ของ A และเราจะเขียนสัญลักษณ์แทนเซตชี้กำลังของ A ด้วย "$\mathbf{P}(A)$"

เราเรียกเซตของสมาชิกที่เป็นส่วนร่วมของเซต A และ B ว่า *อินเตอร์เซกชัน (intersection)* ของ A และ B และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$A \cap B$" ดังนั้นความหมายในรูปประโยคสัญลักษณ์ของข้อความข้างต้นคือ

$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

หรือ

$$(\forall x)(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$$

ในทำนองเดียวกัน *ยูเนียน (union)* ของ A และ B หรือในรูปสัญลักษณ์ "$A \cup B$" จะคือเซตของสมาชิกทั้งหมดของทั้ง A และ B จึงมีความหมายในรูปประโยคสัญลักษณ์เป็น

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

หรือ

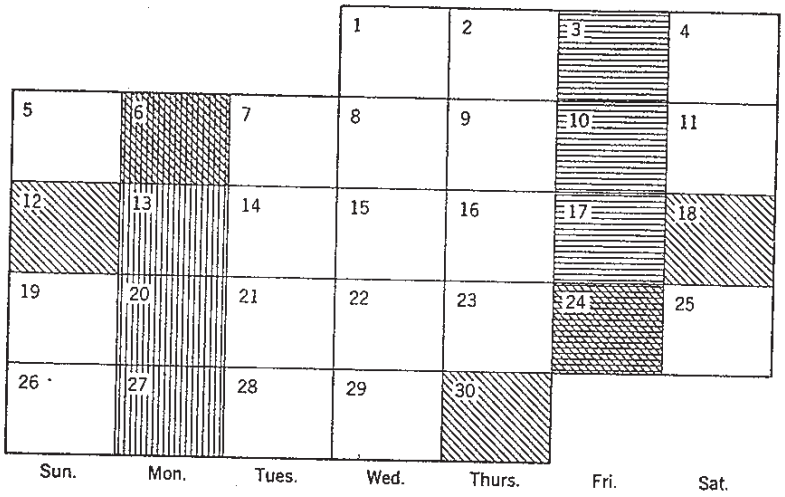
$$(\forall x)(x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

ถ้า $A \cap B = \phi$ เราจะกล่าวว่า A และ B เป็น *เซตต่างสมาชิก (disjoint set)* และจะเรียกเซต

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ว่า *เซตผลต่าง (different set)* ของ A และ B ถ้าเซตผลต่างของเอกภพสัมพัทธ์ (universe) U กับเซต A หรือ U-A เราจะเรียกว่า *เซตเติมเต็ม* ของ A (*complement* of A) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^{c} หรือ A'

ตัวอย่าง 1 : กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ U คือเซตของวันในเดือนเมษายน ปี พ.ศ. 2502 ดังแสดงในแผนภาพข้างล่างนี้



ถ้า

$M = \{x \in U \mid x$ เป็นวันจันทร์ $\}$

$F = \{x \in U \mid x$ เป็นวันศุกร์ $\}$

$V = \{x \in U \mid x$ เป็นตัวคูณของ 6$\}$

แล้ว

$M = \{6, 13, 20, 27\}$

$F = \{3, 10, 17, 24\}$

$V = \{6, 12, 18, 24, 30\}$

ซึ่งทำให้ได้

$M \cup F = \{3, 6, 10, 13, 17, 20, 24, 27\}$

$M \cup V = \{6, 12, 13, 18, 20, 24, 27, 30\}$

$M \cap V = \{6\}$ และ $M \cap F = \phi$

$(M \cup F) \cap V = \{6, 24\}$ และ $(M \cap V) \cup F = \{3, 6, 10, 17, 24\}$

$V^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\}$

$(M \cup F)^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30\}$

$(M \cap V) \cup (F \cap V) = \{6, 24\}$ และ $M \cap V^c = \{13, 20, 27\}$

ตัวอย่าง 2 : กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ U คือเซตของคนทุกคนในโลกนี้ A เป็นเซตของผู้ชายทั้งหมด B เป็นเซตของคนที่สูงเกิน 6 ฟุต และ C เป็นเซตของคนที่มีผมดำ แล้ว

A^c คือ เซตของผู้หญิง

B^c คือ เซตของคนที่เตี้ยกว่าหรือสูงเท่ากับ 6 ฟุต

C^c คือ เซตของคนที่มีผมไม่ดำ

$A \cap B$ คือ เซตของผู้ชายที่สูงเกิน 6 ฟุต

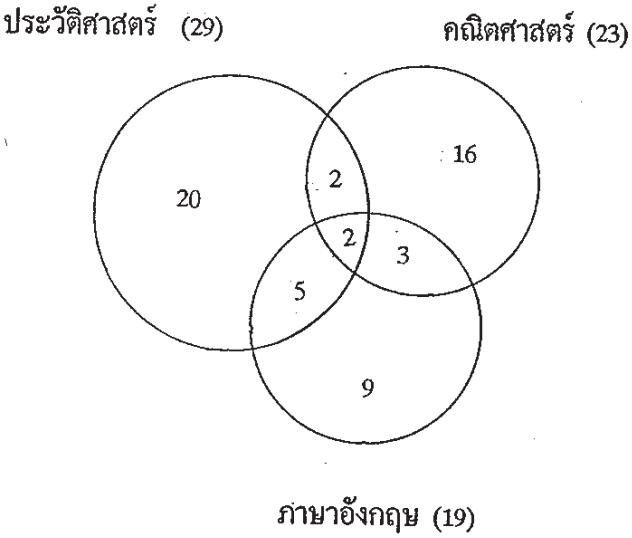
$A^c \cap C$ คือ เซตของผู้หญิงที่มีผมดำ

$(A \cap B) \cap C$ คือ เซตของผู้ชายที่มีผมดำและมีความสูงเกิน 6 ฟุต

เป็นต้น

ตัวอย่าง 3 : ห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียน 57 คน ประกอบด้วยผู้เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 23 คน เลือกเรียนวิชาประวัติศาสตร์ 29 คน และเลือกเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 19 คน ในจำนวนนี้เป็นผู้เลือกเรียนคณิตศาสตร์และประวัติศาสตร์ 4 คน เลือกเรียนประวัติศาสตร์และภาษาอังกฤษแต่ไม่เลือกเรียนคณิตศาสตร์ 5 คน และเลือกเรียนทั้งสามวิชา 2 คน

เราสามารถใช้แผนภาพและความสัมพันธ์ของเซตดังกล่าวข้างต้นแสดงจำนวนนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาต่างๆดังแผนภาพข้างล่างนี้



แบบฝึกหัด 1

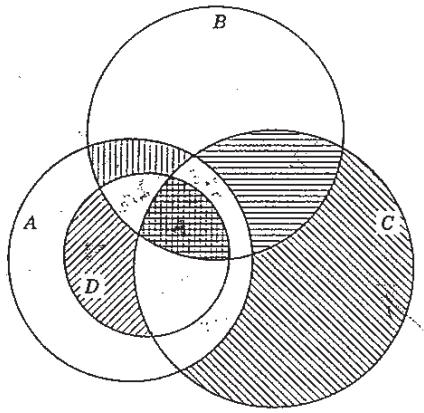
1. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ U คือเซตของสระและพยัญชนะในภาษาอังกฤษ V คือ เซตของสระ C คือ เซตของพยัญชนะและ N คือ เซตของสระและพยัญชนะทั้งหมดในชื่อของท่าน

   จงเขียนเซตต่อไปนี้

   1.1 $N \cup V$ 1.2 $N \cap C$ 1.3 $V \cup C$

   1.4 $N \cap V^c$ 1.5 $C \cap N^c$ 1.6 C^c

2. จงเขียนความสัมพันธ์ของเซตที่เป็นส่วนแรเงา แต่ละส่วนของแผนภาพข้างล่างนี้



3. เราจะต้องเขียน a ลงในที่ใดของแผนภาพในข้อ 2 ถ้า a เป็นสมาชิกของเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

   3.1 $a \in [(B \cap D) \cap C^c]$ 3.2 $a \in ([(A \cap C) \cap B] \cap D^c)$

   3.3 $a \in [(A \cap C) \cap (B \cup D)^c]$ 3.4 $a \in [(C \cap D) - (B \cap D)]$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซตมักอยู่ในรูปแสดงการเท่ากันของเซต 2 เซต ที่เกิดขึ้นหรือสัมพันธ์กันระหว่างเซตที่นิยามข้างต้น ดังตัวอย่างและแบบฝึกหัดข้างล่างนี้

ตัวอย่าง 4 : ถ้า A และ B เป็นสับเซตของเอกภพ U แล้ว $A-B = A\cap B^c$

พิสูจน์ : เราจะต้องพิสูจน์ข้อความ

$(\forall x)(x \in A-B \leftrightarrow x \in A\cap B^c)$

เป็นจริงและเนื่องจาก

$$x \in A-B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \subseteq U \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in U \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A\cap B^c$$

เราจึงได้ว่า $A-B = A\cap B^c$ ตามต้องการ //

ข้อแนะนำเกี่ยวกับการพิสูจน์ :

ในทฤษฎีบทของเซตโดยมากอยู่ในรูปของการแสดงการเท่ากันของเซตสองเซต ทำให้ต้องพิสูจน์ข้อความที่ขึ้นต้นด้วย "ทุกๆ" หรือนั่นคือข้อความในรูปสัญลักษณ์

$(\forall x)(\ .\ .\ .\ )$

อยู่บ่อยๆ เช่น การพิสูจน์ว่าเซต A และ B เป็นเซตเดียวกัน เราต้องพิสูจน์ว่าข้อความ

$(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

เป็นจริง ดังนั้นการจะแสดงข้อความดังกล่าวเป็นจริงต้องอาศัยกฎ U.I. และ U.G. เข้าช่วยด้วย และวิธีหนึ่งของการพิสูจน์จึงควรมีรูปแบบดังนี้

(1) " *ให้* $x \in A$ *แล้ว* . . . . $x \in B$ " หรือ " *ถ้า* $x \in A$ *แล้ว* . . . . $x \in B$ "

และ (2) " *ให้* $x \in B$ *แล้ว* . . . . $x \in A$ " หรือ " *ถ้า* $x \in B$ *แล้ว* . . . . $x \in A$ "

ตัวอย่าง 5 : จงแสดงว่า A และ B เป็นเซต แล้ว $A\cap B = A-(A-B)$

พิสูจน์ : (1) ให้ $x \in A\cap B$ แล้ว $x \in A$ และ $x \in B$ เนื่องจาก $x \in B$ ดังนั้น $x \notin A-B$ ซึ่งทำให้ได้ $x \in A$ และ $x \notin (A-B)$ หรือนั่นคือ $x \in A-(A-B)$

และ (2) ถ้า $x \in A-(A-B)$ แล้ว $x \in A$ แต่ $x \notin A-B$ แสดงว่า $x \in A$ และ $\neg(x \in A \wedge x \notin B)$ ซึ่ง $\neg(x \in A \wedge x \notin B)$ สมมูลกับ $(x \notin A \vee x \in B)$ แต่ $x \in A$

เพราะฉะนั้น $x \in B$ ทำให้ได้ $(x \in A \wedge x \in B)$ หรือนั่นคือ $x \in A \cap B$ //

ขอให้สังเกตว่าการพิสูจน์ของตัวอย่าง 5 เป็นการพิสูจน์ทางตรงที่มีข้อสรุปเป็นข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ "$\forall$"

แบบฝึกหัด 2

1. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซต จงแสดงว่า

   1.1 $A \cap B = B \cap A$ และ $A \cup B = B \cup A$

   1.2 $A \cap B \subseteq A$, $B \subseteq A \cup B$

   1.3 $A \cap A = A \cup A = A$

   1.4 ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap B = A$ และ $A \cup B = B$

   1.5 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ และ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   1.6 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ และ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   1.7 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

   1.8 ถ้า $A \subseteq C$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \cup B \subseteq C$

   1.9 $A \cup (A \cap B) = A$ และ $A \cap (A \cup B) = A$

   1.10 $A \cap B = (A \cup B) - [(A - B) \cup (B - A)]$

   $= A - (A - B)$

   $= B - (B - A)$

2. กำหนดให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จงแสดงว่า

   2.1 $A \cup U = U$ และ $A \cap U = A$

   2.2 $A \cup \phi = A$ และ $A \cap \phi = \phi$

   2.3 $A \cup A' = U$ และ $A \cap A' = \phi$

   2.4 $U^c = \phi$ และ $\phi^c = U$

   2.5 $(A')' = A$

   2.6 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ และ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4.1.2 ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันของกลุ่มของเซต

ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันที่นิยามกันมาแล้ว เป็นการยูเนียนและอินเตอร์เซกชันของเซตสองเซตเท่านั้น ถ้าหากเรานำเซตตั้งแต่สามเซตขึ้นไปมายูเนียนหรืออินเตอร์เซกชันกัน เช่น ถ้าเรานำเซต A, B และ C มายูเนียนกัน ปรากฏว่าได้เซตมากกว่า 3 เซต คือเซตที่เกิดจากการนำ A และ B มายูเนียนกันก่อนได้ $A \cup B$ แล้วจึงนำไปยูเนียนกับ C ได้ $(A \cup B) \cup C$ กับเซตที่เกิดจากการนำ B และ C มายูเนียนกันก่อน เป็น $B \cup C$ แล้วจึงนำมายูเนียนกับ A เป็น $A \cup (B \cup C)$ หรือเซตที่เกิดจากการนำ A และ C มายูเนียนกันเป็น $A \cup C$ แล้วจึงนำไปยูเนียนกับ B เป็น $B \cup (A \cup C)$ เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตามเราได้พิสูจน์แล้วว่า สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ จะได้

1. $A \cup B = B \cup A$ และ $A \cap B = B \cap A$

และ 2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ และ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

เราจึงได้ว่า ไม่ว่าจะนำเซต A, B และ C มายูเนียน หรืออินเตอร์เซกชันกันด้วยวิธีใดก็ตาม ผลที่ได้จะได้เซตเดียวกันเสมอ เราจึงเขียนยูเนียนและอินเตอร์เซกชันของเซตทั้งสามได้ในลักษณะที่ละทิ้งวงเล็บได้ เป็น

$A \cup B \cup C$ และ $A \cap B \cap C$

ตามลำดับ

โดยความคิดเช่นนี้ กับคุณสมบัติของยูเนียนและอินเตอร์เซกชันที่กล่าวมา เมื่อเรามี A เป็นเซตของเซต หรือกลุ่มของเซต เราจึงสามารถนิยามยูเนียน และอินเตอร์เซกชันของสมาชิกทั้งหมดในเซต A ได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 : กำหนดให้ A เป็นกลุ่มของการรวมกันอยู่ของเซต หรือเซตของเซต แล้วเราจะเรียกเซตของสมาชิกที่เป็นสมาชิกของสมาชิกของ A อย่างน้อยตัวหนึ่ง ว่า *ยูเนียน* ของ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$\cup A$" หรือ "$\cup\{c \mid c \in A\}$" หรือ "$\bigcup_{c \in A} c$"

นั่นคือ

$$\cup A = \{x \mid (\exists y)(y \in A \wedge x \in y)\}$$
$$= \{x \mid (\exists y \in A)(x \in y)\}$$

หรือ

$$(\forall x)(x \in \cup A \Leftrightarrow (\exists y \in A)(x \in y))$$

และเราจะเรียกเซตของสมาชิกที่เป็นสมาชิกของทุกๆเซตของ A ว่า *อินเตอร์เซกชัน* ของ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$\cap A$" หรือ "$\cap\{c \mid c \in A\}$" หรือ "$\bigcap_{c \in A} c$"

นั่นคือ

$$\cap A = \{x \mid (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y)\}$$
$$= \{x \mid (\forall y \in A)(x \in y)\}$$

หรือ

$$(\forall x)[x \in \cap A \Leftrightarrow (\forall y \in A)(x \in y)]$$

ตัวอย่าง 1 :

1. $\cup\{\{3, 4\}, \{4, 5\}\} = \{3, 4\}\cup\{4, 5\} = \{3, 4, 5\}$
2. $\cup\{\{3, 4\}, \{4, 5\}, \phi\} = \{3, 4\}\cup\{4, 5\}\cup\phi = \{3, 4, 5\}$
3. $\cup\{\{3, 4\}, \{4, 5\}, \{\phi\}\} = \{3, 4\}\cup\{4, 5\}\cup\{\phi\} = \{3, 4, 5, \phi\}$
4. $\cap\{\{3, 4\}, \{4, 5\}\} = \{3, 4\}\cap\{4, 5\} = \{4\}$
5. $\cap\{\{3, 4\}, \{4, 5\}, \phi\} = \{4\}\cap\phi = \phi$
6. $\cap\{\{\{3, 4\}\}, \{3, 4\}, \{3\}\} = \{\{3, 4\}\}\cap\{3, 4\}\cap\{3\} = \phi$

ทฤษฎีบท 1 :

1. $c \in A \Rightarrow c \subseteq \cup A$
2. $c \in A \Rightarrow \cap A \subseteq c$
3. $\cap A \subseteq \cup A$ ถ้า $A \neq \phi$

พิสูจน์ : (1) สมมติให้ $c \in A$ และ $x \in c$ ซึ่งแสดงว่ามีสมาชิก c ของ A ที่ซึ่ง $x \in c$ ดังนั้น $x \in \cup A$

(2) สมมติให้ $c \in A$ และ $x \in \cap A$ ดังนั้นโดยนิยามของ $\cap A$ เราจะได้ว่า $x \in y$ สำหรับทุกๆ y ซึ่ง $y \in A$ แต่ $c \in A$ เช่นกัน เพราะฉะนั้น $x \in c$

(3) ให้ $A \neq \phi$ ดังนั้นจะมี $c \in A$ ซึ่งโดย (1) จะได้ $c \subseteq \cup A$ แต่โดย (2) $\cap A \subseteq c$ เพราะฉะนั้น $\cap A \subseteq c \subseteq \cup A$ //

ข้อแนะนำเกี่ยวกับการพิสูจน์ : ในการพิสูจน์ข้อความ

"$p \Rightarrow q$"

หรือนั่นคือพิสูจน์การอนุมาน เราต้องเริ่มต้นการเขียนพิสูจน์ด้วยประโยค

"*กำหนดให้ p* " หรือ "*สมมติ p* "

แล้วดำเนินการพิสูจน์ให้ได้ "ข้อความ q" แต่ในทฤษฎีเซต "ข้อความ q" มักเป็น "การเท่ากันของเซต" หรือ "การเป็นสับเซต" ที่ทำให้เราต้องแปลงให้เป็นรูปประโยคสัญลักษณ์ที่สมมูลกัน ซึ่งโดยมากจะเป็นข้อความในรูป

$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

ซึ่งเป็นข้อความที่ขึ้นต้นด้วยตัวบ่งปริมาณทั้งหมด "$\forall$" ดังนั้นโดยข้อแนะนำการพิสูจน์ในหัวข้อ 4.1 จึงต้องเริ่มการพิสูจน์ "ข้อความ q" ด้วยการเขียนประโยค "ให้ $x \in A$" การพิสูจน์ทั้งหมดจึงเริ่มต้นด้วย

"*สมมติให้ p และ $x \in A$*"

ดังเช่นตัวอย่างการเขียนพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 ข้อ 1 และข้อ 2 ข้างต้น

แบบฝึกหัด 3

จงพิสูจน์

1. $\cup\phi = \phi$ และ $\cap\phi = U$
2. $\cup\{B\} = B = \cap\{B\}$
3. $\cup\{B, C\} = B \cup C$ และ $\cap\{B, C\} = B \cap C$
4. $A \subseteq B \Rightarrow \cup A \subseteq \cup B$
5. $A \subseteq B \Rightarrow \cap A \supseteq \cap B$

6. $(\forall c \in A)(c \subseteq V) \Rightarrow \cup A \subseteq V$

7. $(\forall c \in A)(V \subseteq c) \Rightarrow V \subseteq \cap A$

8. $(\bigcup_{x \in A} x)^c = \bigcap_{x \in A} x^c$ และ $(\bigcap_{x \in A} x)^c = \bigcup_{x \in A} x^c$

9. **บทนิยาม** : กำหนดให้ a และ b เป็นเซต เราจะใช้สัญลักษณ์ $<a, b>$ แทนเซต $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ และเรียกว่า*คู่อันดับ(ordered pair)* ของ a และ b

จงแสดงว่า

9.1 $\cap\cap<a, b> = a$

9.2 $\cap(\cup<a, b> - \cap<a, b>) = b$ ถ้า $a \neq b$

9.3 ถ้า $a \in A$ และ $b \in B$ แล้ว $<a, b> \in PP(A \cup B)$

10. **บทนิยาม** : เราจะเรียก a และ b ของคู่อันดับ $<a, b>$ ที่นิยามไว้ในข้อ 9 ว่า *คู่อันดับหน้า* และ *คู่อันดับหลัง* ตามลำดับ และเรียกเซตของคู่อันดับทั้งหมดที่มีคู่อันดับหน้าเป็นสมาชิกของเซต A และคู่อันดับหลังเป็นสมาชิกของเซต B ว่า *ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product)* ของ A และ B โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$A \times B$" นั่นคือ

$A \times B = \{<a, b> \mid a \in A \wedge b \in B\}$

จงแสดงว่า ถ้า A, B และ C เป็นเซตแล้ว

10.1 $A \times B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$

10.2 $A \times B$ และ $B \times A$ เป็นเซตเดียวกันหรือไม่

10.3 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

10.4 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

10.5 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

10.6 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

11. **บทนิยาม** : เราจะกล่าวว่า X เป็น *เซตใหญ่สุด* ที่มีคุณสมบัติ Φ ถ้า X สอดคล้องคุณสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

ก. X มีคุณสมบัติ Φ

และ ข. ถ้า Y เป็นเซตที่มีคุณสมบัติ Φ แล้ว $Y \subseteq X$

จงแสดงว่า $A \cap B$ เป็นเซตใหญ่สุดที่เป็นสับเซตของทั้งเซต A และเซต B

12. **บทนิยาม** : เราจะกล่าวว่า X เป็น *เซตเล็กสุด* ที่มีคุณสมบัติ Φ ถ้า X สอดคล้องคุณสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

ก. X มีคุณสมบัติ Φ

และ ข. ถ้า Y เป็นเซตที่มีคุณสมบัติ Φ แล้ว $X \subseteq Y$

จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตเล็กสุดที่มีทั้งเซต A และเซต B เป็นสับเซต

4.1.3 เซตดรรชนี

ในวิชาคณิตศาสตร์เกือบทุกสาขาจะมีการใช้ดรรชนีเพื่อความสะดวกและง่ายต่อการกำหนดบัญชีชื่อของเซตต่างๆที่เกี่ยวข้องอยู่ แต่การกำหนดให้ A, B, C, . . . , K, L เป็นบัญชีชื่อของเซตตามต้องการนั้น เห็นได้ชัดว่าเราสามารถทำบัญชีรายชื่อได้เพียงจำนวนจำกัดเท่านั้น ยิ่งไปกว่านั้นการกล่าวถึงการรวมกันอยู่ของเซตที่เรามักเกี่ยวข้องอยู่จะเป็นเซตอนันต์ วิธีดังกล่าวจึงไม่อาจทำได้ และสำหรับการกล่าวโดยให้ **A** เป็นการรวมกันอยู่ของเซต อาจทำให้ **A** มีจำนวนสมาชิกได้ไม่จำกัดก็ตาม แต่เมื่อต้องการเรียกชื่อหรือชี้เฉพาะแต่ละสมาชิกของ **A** จะทำได้ลำบากและไม่สื่อความหมาย นักคณิตศาสตร์จึงพิจารณาหาวิธีการที่จะเขียนการรวมกันอยู่ของเซตจำกัด ที่สามารถเรียกชื่อแต่ละสมาชิกตามลำดับได้ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าเราสามารถเขียนได้ดังนี้

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ หรือ $\{A_i \mid i \leq n\}$

ดังนั้นเมื่อเราเปลี่ยนการเขียนให้เป็นเซต

$\{A_i \mid i \in I\}$

แล้ว เซตนี้อาจเป็นเซตจำกัด หรือ เซตอนันต์ ก็ได้ขึ้นอยู่กับเซต I ซึ่งจะเห็นว่าวิธีการเขียนเช่นนี้ทำให้เราสามารถกำหนดบัญชีรายชื่อของเซตต่างๆ ที่รวมกันอยู่ให้เป็นไปตามความต้องการได้

เราเรียก i ของ A_i ว่า*ดรรชนี (index)* ของ A_i ดังนั้น I จึงเป็น *เซตดรรชนี (index set)* ของ $\{A_i \mid i \in I\}$

ดังนั้นถ้าเรากำหนดการเขียนสมาชิกของ A ด้วยเซตดรรชนีแล้วจะทำให้เราสามารถเขียน $\cup A$ และ $\cap A$ ในรูปเซตดรรชนีได้เป็น

$\bigcup_{i \in I} A_i$ และ $\bigcap_{i \in I} A_i$

ตามลำดับ และทฤษฎีบทต่างๆของยูเนียนและอินเตอร์เซกชันในรูปของเซตดรรชนีก็จะตามมาดังนี้

ทฤษฎีบท 1 : กำหนดให้ $\{A_i \mid i \in I\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปเซตดรรชนี แล้ว

1. ถ้า $A_i \subseteq B$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ แล้ว $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

2. ถ้า $B \subseteq A_i$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ แล้ว $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$

3. $(\bigcup_{i \in I} A_i)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$ และ $(\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

พิสูจน์ : (1) สมมติให้ $A_i \subseteq B$ สำหรับแต่ละ $i \in I$
และให้ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$

ดังนั้นจะมี $j \in I$ ซึ่ง $x \in A_j$ แต่ $A_j \subseteq B$ จึงได้ $x \in B$
นั่นคือ $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

(3) ให้ $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)'$ แล้ว $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$

หรือ $\neg (\exists i \in I)(x \in A_i)$ ซึ่งสมมูลกับ $(\forall i \in I)(x \notin A_i)$
หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า $x \notin A_i'$ สำหรับทุกๆ $i \in I$
ดังนั้น $x \in \bigcap_{i \in I} A_i'$ //

ข้อสังเกต : ขอให้สังเกตว่าการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 (3) ข้างต้นได้ดำเนินการตามบทนิยามและนิเสธของบทนิยามของ "$\cap$" และ "$\cup$"

แบบฝึกหัด 4

1. กำหนดให้ $\{A_i \mid i \in I\}$ และ $\{B_j \mid j \in J\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปเซตดรรชนี จงแสดงว่า

1.1 $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{\langle i,j \rangle \in I \times J} (A_i \cap B_j)$

1.2 $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{\langle i,j \rangle \in I \times J} (A_i \cup B_j)$

2. กำหนดให้ $\{A_i \mid i \in I\}$ และ $\{B_i \mid i \in I\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปที่มีเซตดรรชนีเดียวกัน และสมมติว่าสำหรับแต่ละ $i \in I$ เรามี $A_i \subseteq B_i$ จงแสดงว่า

2.1 $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$

2.2 $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$

3. กำหนดให้ $\{A_i \mid i \in I\}$ และ $\{B_j \mid j \in J\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปเซตดรรชนี I และ J ตามลำดับ ถ้าสำหรับแต่ละ $i \in I$ จะมี $j \in J$ ซึ่ง $B_j \subseteq A_i$ จงแสดงว่า

$$\bigcap_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$$

4. กำหนดให้ $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ และ $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ จงแสดงว่า ถ้า N เป็นเซตของจำนวนนับ แล้ว

4.1 $\bigcap_{i \in N} (X_i \cup Y_i) = (\bigcap_{i \in N} X_i) \cup (\bigcap_{i \in N} Y_i)$

4.2 ท่านคิดว่าเครื่องหมาย "=" ของข้อ 4.1 ยังคงเป็นจริงสำหรับการรวมกันอยู่ของเซตในรูปเซตดรรชนี ทั่วๆไปหรือไม่

4.1.4 นิยามและคุณสมบัติเบื้องต้นของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นตัวดำเนินการที่สำคัญในเกือบทุกแขนงของคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยทั่วไปจะให้นิยามฟังก์ชัน ดังนี้

"ถ้า X และ Y เป็นเซต แล้วฟังก์ชัน f จาก X ไปยัง Y คือกฎหรือสูตร ที่กำหนดสมาชิกเพียงตัวเดียวใน Y สำหรับแต่ละสมาชิก x ของ X"

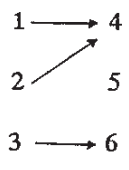
เรานิยมใช้สัญลักษณ์ "$f : X \to Y$" หรือ "$x \xrightarrow{f} y$" แทนข้อความข้างต้น และสำหรับ*กฎ* หรือ*สูตร* ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $x \in X$ และ $y \in Y$ ข้างต้น โดยมากนิยมเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย "$y = f(x)$" และเรียก y หรือ $f(x)$ ซึ่งเป็น "ค่า" หรือ "สมาชิก" เพียงตัวเดียวที่สอดคล้องกับแต่ละ x ว่า *อิมเมจภายใต้ f ของ x (image of x under f)* และบางครั้งจึงอาจใช้สัญลักษณ์ "$x \to f(x)$" แทนฟังก์ชัน

จากการนิยามฟังก์ชันข้างต้น เราสามารถกล่าวถึงสัญลักษณ์ "$f : X \to Y$" ในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

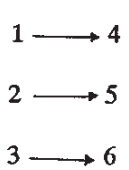
$$"(\forall x, y \in X)(x = y \Rightarrow f(x) = f(y))"$$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของฟังก์ชัน $f : X \to Y$ เมื่อกำหนด X และ Y ในแต่ละข้อ

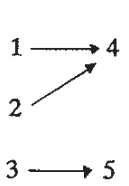
1. $X = \{1, 2, 3\}$
   $Y = \{4, 5, 6, 7\}$



2. $X = \{1, 2, 3\}$
   $Y = \{4, 5, 6\}$



3. $X = \{1, 2, 3\}$
   $Y = \{4, 5\}$



4. $X = Y =$ เซตของจำนวนธรรมชาติ

$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

5. X = เซตของจำนวนธรรมชาติ , Y = เซตชี้กำลังของ X และ

$f(x) = \{x\}$

บทนิยาม 1 : กำหนดให้ $f : X \to Y$ เราจะเรียก X ว่า *โดเมน (domain)* ของฟังก์ชัน f และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$D(f)$" และเรียกเซต

$$\{y \in Y \mid (\exists x \in X)(y = f(x)\}$$

ว่า *พิสัย (range)* ของ f ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$R(f)$"

สำหรับแต่ละ $X \subseteq X$ และ $Y \subseteq Y$ เราจะใช้สัญลักษณ์ $f(X)$ และ $f^{-1}(Y)$ แทนเซต

$$\{f(x) \mid x \in X\} \quad \text{หรือ} \quad \{y \in Y \mid (\exists x \in X)(y = f(x)\}$$

และ

$$\{x \in X \mid f(x) \in Y\} \quad \text{หรือ} \quad \{x \in X \mid (\exists y \in Y)(f(x) = y)\}$$

และเรียกว่า *อิมเมจของ* X *ภายใต้ f (image of* X *under f)* และ *อิมเมจผกผันของ* Y *ภายใต้ f (inverse image of* Y *under f)* ตามลำดับ

เช่นจากตัวอย่างของฟังก์ชัน ตัวอย่าง 1 ถึง ตัวอย่าง 5 ข้างต้น เราจะได้

1. $f^{-1}(\{4\}) = \{1, 2\}$ และ $f(\{2, 3\}) = \{4, 6\}$
2. $f(\{1, 2\}) = \{4, 5\}$ และ $f^{-1}(\{6\}) = \{3\}$
3. $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5\}$ และ $f^{-1}(\{5\}) = \{3\}$
4. $f(\{2, 4, 6\}) = \{0\}$, $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{0, 1\}$,
   $f^{-1}(\{0\})$ = เซตของจำนวนคู่ และ $f^{-1}(\{1\})$ = เซตของจำนวนคี่
5. $f(\{1, 2, 3\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ และ $f^{-1}(\{4, 5\}) = \phi$

ถ้าเราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f : X \to Y$ และ $g : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันเดียวกัน เราจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย "$f = g$" ซึ่งหมายความว่าโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองต้องเป็นเซตเดียวกัน และดังนั้นที่แต่ละ $x \in X$ ค่าของฟังก์ชันทั้งสองต้องกำหนดได้เป็นค่าเดียวกันด้วย ดังนั้น

$$f = g \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x))$$

หรือ

$$f = g \Leftrightarrow (\forall x \in X)(f(x) = g(x))$$

และ

$$f \neq g \Leftrightarrow \neg (\forall x \in X)(f(x) = g(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in X)(f(x) \neq g(x))$$

ฟังก์ชันของตัวอย่าง 2 และตัวอย่าง 4 เป็นฟังก์ชันซึ่งส่งสมาชิกที่ต่างกันของ X ไปยังสมาชิกที่ต่างกันใน Y หรือกล่าวในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น

$$(\forall x, y \in X)(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

หรือในรูปข้อความที่สมมูลกันเป็น

$$(\forall x, y \in X)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

และเราจะเรียกฟังก์ชันที่มีคุณลักษณะเช่นนี้ว่า *ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 function)*

บทนิยาม 2 : $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ

$$(\forall x, y \in X)(x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y))$$

ฟังก์ชันในตัวอย่าง 2 และตัวอย่าง 3 เป็นฟังก์ชันที่ทุกๆสมาชิก $y \in Y$ ถูกกำหนดให้จับคู่กับสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวใน X หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า ทุกสมาชิก $y \in Y$ เป็นอิมเมจภายใต้ f ของสมาชิก $x \in X$ ตัวหนึ่ง ซึ่งข้อความนี้สามารถเขียนในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$$

และเราจะเรียกฟังก์ชันที่มีคุณลักษณะเช่นนี้ว่า *ฟังก์ชันไปบน (onto function)* หรือ *ฟังก์ชันแบบทั่วถึง (surjective function)*

ขอให้สังเกตว่า $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $R(f) = Y$

บทนิยาม 3 : $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $R(f) = Y$ หรือนั่นคือ

$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x))$

ฟังก์ชันในตัวอย่าง 1 และตัวอย่าง 4 ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันไปบน ในขณะที่ฟังก์ชันในตัวอย่าง 2 เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันไปบน

บทนิยาม 4 : เราจะเรียกฟังก์ชัน $f : X \rightarrow Y$ ว่า*ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (bijection)* ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันไปบน

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง $f : X \rightarrow Y$ จะกำหนดความสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสมาชิกของ X และสมาชิกของ Y นั่นคือสำหรับแต่ละ $x \in X$ จะมี $y \in Y$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $y = f(x)$ และสำหรับแต่ละ $y \in Y$ ก็จะมี $x \in X$ และมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $y = f(x)$ เราจึงเรียกชื่อฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงอีกอย่างหนึ่งว่า*ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 correspondence)*

บทนิยาม 5 : กำหนดให้ $f : X \rightarrow Y$ และ $X_0 \subseteq X$ เราจะเรียกฟังก์ชัน $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ ซึ่งถูกนิยามโดย

$$f|_{X_0}(x) = f(x)$$

ว่า *ฟังก์ชันกำกัด ของ f บน X_0 (restriction of f to X_0)*

บทนิยาม 6 : ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $g : C \rightarrow D$ แล้ว $D(f \cup g) = A \cup C$ และ

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ g(x) & , x \in C \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 1 : ถ้า $f : X_1 \cup X_2 \rightarrow Y$ แล้ว $f = f|_{X_1} \cup f|_{X_2}$

พิสูจน์ : เนื่องจาก $f|_{X_1} : X_1 \to Y$ และ $f|_{X_2} : X_2 \to Y$

ดังนั้น $D(f|_{X_1} \cup f|_{X_2}) = X_1 \cup X_2 = D(f)$

ให้ $x \in X_1 \cup X_2$ ดังนั้น

$$(f|_{X_1} \cup f|_{X_2})(x) = \begin{cases} f|_{X_1}(x) = f(x) & , x \in X_1 \\ f|_{X_2}(x) = f(x) & , x \in X_2 \end{cases}$$

ซึ่งไม่ว่ากรณีใดเราจะได้ $f(x) = (f|_{X_1} \cup f|_{X_2})(x)$

เพราะฉะนั้น $f = f|_{X_1} \cup f|_{X_2}$ //

แบบฝึกหัด 5

1. กำหนดให้ $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ และ $C, D \subseteq Y$ จงแสดงว่า

   1.1 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ พร้อมทั้งยกตัวอย่างแสดงกรณีที่อาจไม่เท่ากัน

   1.2 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 1.3 $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

   1.4 $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ 1.5 $f^{-1}(Y - C) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(C)$

2. กำหนดให้ $f : X \to Y$ จงแสดงว่า

   2.1 $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\Leftrightarrow (\forall A, B \subseteq X)[f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$

   2.2 $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง $\Leftrightarrow (\forall A \subseteq X)[Y - f(A) \subseteq f(X - A)]$

   2.3 $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $\Leftrightarrow (\forall A \subseteq X)[f(X - A) = Y - f(A)]$

3. กำหนดให้ $\mathbf{P}(V)$ แทนเซตชี้กำลังของเซต V และนิยาม $f : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V)$ โดย

   $f(A) = A^c$, $A \subseteq V$

   จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

4. กำหนดให้ $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$ และ $f : A \to I_A$ กำหนดโดย

   $f(x) = \langle x, x\rangle$, $x \in A$

   จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

5. กำหนดให้ $f : A \to B$ และ $g : A \to B$ จงแสดงว่า ถ้า $f \subseteq g$ แล้ว $f = g$

หาในน้อง 1.2 1.3 2.3 ส่วน $f(x) = x^2$

6. กำหนดให้ $f : A \to B$ และ $g : C \to D$ และนิยามผลคูณ $f.g$ ดังนี้

$$(f.g)(<x, y>) = <f(x), g(y)> \quad , <x, y> \in A \times C$$

จงแสดงว่า

6.1 $f.g : A \times C \to B \times D$

6.2 ถ้า f และ g ต่างเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f.g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

6.3 ถ้า f และ g ต่างเป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง แล้ว $f.g$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

6.4 $R(f.g) = R(f) \times R(g)$

7. ถ้า $f : A \to B$ และ $g : C \to D$ แล้ว $f \cup g : A \cup C \to B \cup D$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

8. กำหนดให้ $f_1 : B \to A$, $f_2 : C \to A$ และ $B \cap C = \phi$ ถ้า $f = f_1 \cup f_2$ แล้วจงแสดงว่า

8.1 $f : B \cup C \to A$

8.2 $f_1 = f|_B$ และ $f_2 = f|_C$

9. กำหนดให้ $f_1 : A \to B$ และ $f_2 : C \to D$ ต่างเป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $A \cap C = \phi$ และ $B \cap D = \phi$ จงแสดงว่า ถ้า $f = f_1 \cup f_2$ แล้ว $f : A \cup C \to B \cup D$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

10. กำหนดให้ $f : B \to A$ และ $g : C \to A$ และสมมติ $f|_{B \cap C} = g|_{B \cap C}$ จงแสดงว่า ถ้า $h = f \cup g$ แล้ว $h : B \cup C \to A$ โดยที่ $f = h|_B$ และ $g = h|_C$

สมมติให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ แล้วสำหรับแต่ละ $a \in A$ จะได้ว่า $f(a) \in B$ ซึ่งทำให้การเขียน $g(f(a))$ มีความหมาย และหมายถึงสมาชิกของ C

$$a \xrightarrow{f} f(a) \xrightarrow{g} g(f(a))$$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $a \in A$ เราจะได้ $g(f(a))$ เป็นสมาชิกเพียงตัวเดียวใน C ที่สอดคล้องกับ a หรือนั่นคือ $g(f(a))$ เป็นค่าหรืออิมเมจของ a ภายใต้ฟังก์ชันหนึ่ง ซึ่งเราจะเรียกฟังก์ชันที่เกิดขึ้นในลักษณะเช่นนี้ว่า *ฟังก์ชันผลประกอบ* ของ f และ g และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "g o f"

บทนิยาม 7 : กำหนดให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ *ฟังก์ชันผลประกอบ (composition)* ของ f และ g ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "g o f" เป็นฟังก์ชัน

$g \circ f : A \to C$ ซึ่งถูกนิยามดังนี้

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad , x \in A$

ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้ **N, Z** และ **Q** เป็นสัญลักษณ์แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ เซตของจำนวนเต็ม และเซตของจำนวนตรรกยะ ตามลำดับ และกำหนดให้

$f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ นิยามโดย $f(n) = -n$

และ $g : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ นิยามโดย $g(m) = \frac{m}{2}$

แล้ว $g \circ f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ นิยามโดย $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(-n) = -\frac{n}{2}$

ถ้า $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง แล้ว (เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง) สำหรับแต่ละ $y \in Y$ จะมี $x \in X$ ซึ่ง $y = f(x)$ และ (เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง) x ที่กล่าวถึงนี้จะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น เพราะฉะนั้นเราอาจพิจารณากฎการส่งแต่ละสมาชิก $y \in Y$ ไปยัง x เพียงตัวเดียวด้วยเงื่อนไขของ f นี้ว่าเป็นฟังก์ชันจาก Y ไปยัง X ได้เช่นกัน ซึ่งลักษณะการส่งสมาชิกของฟังก์ชันจาก Y ไปยัง X เช่นนี้เป็นลักษณะการส่งสมาชิกที่ f ส่งมาที่ Y ให้กลับไปยังที่เดิมใน X เราจึงเรียกชื่อฟังก์ชันใหม่ที่เกิดขึ้นนี้ว่า*ฟังก์ชันผกผัน* ของ f

บทนิยาม 8 : กำหนดให้ $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง แล้ว *ฟังก์ชันผกผันของ f (inverse function of f)* ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "f^{-1}" เป็นฟังก์ชัน $f^{-1} : Y \to X$ ซึ่งถูกนิยามโดย

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

ข้อสังเกต : (1) ขอให้สังเกตว่าถ้า f เป็นฟังก์ชัน แล้วไม่จำเป็นที่ f จะต้องมีฟังก์ชันผกผัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า การเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงของ f เป็นเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของการมีฟังก์ชันผกผันของ f

(2) ถ้า $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง แล้ว $f^{-1} \circ f = id_X$ และ $f \circ f^{-1} = id_Y$

ทฤษฎีบท 2 : กำหนดให้ U, V และ W เป็นเซต แล้ว

1. จะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก V ไปบน V

2. ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก U ไปบน V แล้วจะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก V ไปบน U

3. ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก U ไปบน V และจาก V ไปบน W แล้วจะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง U ไปบน W

แบบฝึกหัด 6

1. จงแสดงว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงด้วย

2. จงแสดงว่า ถ้า $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ต่างเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง แล้ว $g \circ f : A \to C$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

3. กำหนดให้ $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ จงแสดงว่า
$g \circ f = id_X$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

4. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม $\mathbf{Z}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม และนิยามฟังก์ชัน $\alpha_{(a,b)} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ดังนี้

$$\alpha_{(a,b)}(n) = an + b \qquad , n \in \mathbf{Z}$$

4.1 จงหาคู่ของจำนวนเต็ม a และ b ที่ทำให้ $\alpha_{(a,b)}$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

4.2 จงหาคู่ของจำนวนเต็ม a และ b ที่ทำให้ $\alpha_{(a,b)}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5. กำหนดให้ $f : A \to B$ จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

5.1 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5.2 สำหรับทุกๆฟังก์ชัน g และ h จาก $C \subseteq A$ ไปยัง B ถ้า $g \circ f = h \circ f$ แล้ว $g = h$

5.3 สำหรับทุกๆสับเซต C ของ A เราจะได้ $f(A-C) \supseteq B-f(A)$

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2

4.2 บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับพีชคณิต

เนื่องจากเซตเป็นรากฐานของคณิตศาสตร์ทุกแขนงวิชา และพีชคณิตเป็นแขนงของคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงขบวนการตรวจสอบว่า สิ่งทั้งหลายทางคณิตศาสตร์ที่รวมกันอยู่ในรูปของเซตสามารถที่จะกระทำการดำเนินการต่อกัน ตัวอย่างเช่น การบวก และการคูณของจำนวนจริงได้หรือไม่ ตลอดทั้งการศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของการดำเนินการของสิ่งต่างๆนั้นได้นำไปสู่คำตอบของปัญหาที่สำคัญๆและน่าสนใจมากมาย การศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญทางพีชคณิตจึงเป็นที่สนใจของผู้ที่เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์อยู่ตลอดมา ในหัวข้อต่อไปนี้จึงขอศึกษาบทนิยามของการดำเนินการบนเซต และแนะนำวิธีการพิสูจน์อันเป็นลักษณะเฉพาะของการพิสูจน์คุณสมบัติของการดำเนินการเหล่านั้น พร้อมกับชี้ให้เห็นข้อผิดพลาดของการพิสูจน์ ซึ่งผู้ไม่เข้าใจการพิสูจน์อย่างแจ่มแจ้งมักนิยมใช้ เพื่อให้ท่านเข้าใจและจะไม่นำวิธีการเช่นนั้นไปใช้พิสูจน์อย่างผิดพลาดอีก

4.2.1 การดำเนินการบนเซต

บทนิยาม 1 : เราจะกล่าวว่า # เป็น *การดำเนินการทวิภาค (binary operation)* หรือ *การดำเนินการ(operation)* บนเซต S ถ้าแต่ละคู่สมาชิก x และ y ของ S จะมีสมาชิกตัวที่สามของ S ที่เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " x#y " ซึ่งสอดคล้องกับ x และ y

ตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดให้

R เป็นเซตของจำนวนจริง

Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ

C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

1. ถ้า S = **R** และ x#y = x+y หรือ x#y = xy

(นั่นคือ การบวกและการคูณ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนจริง **R**)

2. ถ้า S = **Q** และ x#y = x - y

(นั่นคือ การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนตรรกยะ **Q**)

3. ถ้า S เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ # เป็นการคูณของเมทริกซ์

[นั่นคือ การคูณของเมทริกซ์เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2]

4. ถ้า S เป็นเซตของฟังก์ชันจาก **R** ไปยัง **R** และ $f\#g = f+g$

โดยที่ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ สำหรับทุกๆ x ใน **R**

[นั่นคือ การบวกของฟังก์ชันเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของฟังก์ชันค่าจริง]

5. ถ้า S เป็นเซตของฟังก์ชันจาก **R** ไปยัง **R** และ $f\#g = f \circ g$

[นั่นคือ ผลประกอบของฟังก์ชันเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของฟังก์ชันค่าจริง]

6. ถ้า $S = \mathbf{C}$ และ $x\#y = x^2 + y - 2xy$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าเราสามารถนิยามการดำเนินการทวิภาคได้มากมาย (แม้บนเซตเดียวกัน) ดังนั้นสัญลักษณ์ที่จะใช้แทนการดำเนินการจึงมีได้มากมายเช่นกัน และที่นิยมใช้กันก็มีตัวอย่างเช่น $\circ$, #, \$, Δ , σ , . . . เป็นต้น เพื่อใช้แทนการดำเนินการที่แตกต่างกัน

การดำเนินการที่สำคัญๆทางคณิตศาสตร์มักเกิดขึ้นด้วยวิธีการต่อไปนี้คือ เมื่อเรากำหนดการดำเนินการ # ขึ้นบนเซต G เซตหนึ่ง แต่แล้วเรากลับเน้นพิจารณาเพียงแค่สับเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง H เซตหนึ่งของ G เท่านั้น [เช่น G อาจเป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ที่เรานิยามการดำเนินการการคูณระหว่างเมทริกซ์ขึ้น แต่เรากลับไปพิจารณาการคูณเพียงบนเซต H ที่เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ที่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้] และเราสังเกตว่า ถ้า h_1, h_2 เป็นสมาชิกของ H แล้วผลคูณ $h_1\#h_2$ ยังคงเป็นสมาชิกของ H เช่นกัน ซึ่งแสดงว่า # ไม่ใช่เพียงแต่เป็นการดำเนินการบนเซต G เท่านั้น แต่เป็นการดำเนินการบนเซต H ด้วย และแม้การดำเนินการที่กำหนดบนเซต H เช่นนี้จะมีโดเมนแตกต่างจากการดำเนินการบนเซต G เดิม เราก็ยังคงนิยมใช้สัญลักษณ์แทนการดำเนินการบน H และ G ในกรณีเช่นนี้เป็นสัญลักษณ์เดียวกัน

บทนิยาม 2 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G และให้ H เป็นสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่างของ G เราจะกล่าวว่า H มี*คุณสมบัติปิด* ภายใต้ # *(H is closed under #)* ถ้า $h_1, h_2 \in H$ แล้ว $h_1\#h_2 \in H$

ตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดให้

N เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ

Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbf{R}^+$ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก

1. **N, Z, Q** และ $\mathbf{R}^+$ มีคุณสมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณของจำนวนจริง
2. **R - Q** ไม่มีคุณสมบัติปิดภายใต้การบวก เช่น $\sqrt{2}$ และ $1-\sqrt{2}$ เป็นสมาชิกของ **R - Q** แต่ $\sqrt{2}+(1-\sqrt{2}) = 1$ ไม่เป็นสมาชิกของ **R - Q** เป็นต้น
3. **Z - N** ไม่มีคุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ เช่น $(-2)(-3) = 6 \notin$ **Z - N**
4. ถ้าให้ $M_2(\mathbf{R})$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง และ det(A) แทน*ดีเทอร์มินันต์* ของเมทริกซ์ A ใน $M_2(\mathbf{R})$ แล้วเซต $\{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 1\}$ จะมีคุณสมบัติปิดภายใต้การคูณของเมทริกซ์ขนาด 2×2
5. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จตุรัสขนาด n แล้วเราจะเรียกเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นโดยการเปลี่ยนแถวของ A เป็นสดมภ์ว่า *เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose)* ของ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^t เช่น

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{และ}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

เราจะเรียกเมทริกซ์จตุรัส A ขนาด n ว่า *เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal)* ถ้า $AA^t = I_n$ และจะเขียนแทนเซตของเมทริกซ์เชิงตั้งฉากขนาด n ทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{O}(n)$ เช่น

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(2), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(2)$$

เนื่องจาก $\sum_{r=1}^{n} a_{jr} b_{ri}$ ต่างเป็นสมาชิกในแถวที่ i และสดมภ์ที่ j ของทั้งเมทริกซ์

$(AB)^t$ และ B^tA^t เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$(AB)^t = B^tA^t$$

ที่จะทำให้เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า"$O(n)$ *มีคุณสมบัติปิดภายใต้การคูณของเมทริกซ์*" ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 : $O(n)$ มีคุณสมบัติปิดภายใต้การคูณของเมทริกซ์

พิสูจน์ : เนื่องจากสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์ คือข้อความในรูปสัญลักษณ์

$$(\forall A)(\forall B)[A \in O(n) \wedge B \in O(n) \Rightarrow AB \in O(n)]$$

เราจึงเริ่มการพิสูจน์ด้วยการให้ A และ B แทนสมาชิกใดๆใน $O(n)$ แล้วจะได้

$$(AB)(AB)^t = (AB)(B^tA^t) = A(BB^t)A^t$$

แต่ $A, B \in O(n)$ เราจะได้ $BB^t = I_n$ และ $AA^t = I_n$ ดังนั้น

$$(AB)(AB)^t = AA^t = I_n$$

ซึ่งแสดงว่า $AB \in O(n)$ //

สังเกตว่า $1 = \det(AA^t) = \det(A)\det(A^t)$ และจาก $\det(A) = \det(A^t)$ ทำให้เราสรุปได้ว่า ถ้า $A \in O(n)$ แล้ว $\det(A) = 1$ หรือ $\det(A) = -1$ จึงทำให้สรุปได้ว่าเซต

$$\{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

มีคุณสมบัติปิดภายใต้การคูณของเมทริกซ์เช่นเดียวกัน

จากตัวอย่างที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น เป็นตัวอย่างการนิยามการดำเนินการทวิภาคบนเซตอนันต์ทั้งสิ้น แต่หากเรามีเซต S ที่เป็นเซตจำกัด วิธีที่ดีวิธีหนึ่งของการกำหนดการดำเนินการ # บนเซต S คือการกำหนดด้วยตาราง ตัวอย่างเช่น ถ้า $S = \{1, i, -1, -i\}$ เป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน C แล้วการคูณ " . " บนเซต S อาจถูกกำหนดให้เห็นได้อย่างง่ายๆด้วยตารางต่อไปนี้

.	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

ตาราง 1

และโดยทั่วไป ถ้า x และ y เป็นสมาชิกของ S แล้ว x#y จะถูกเขียนไว้ในตำแหน่งแถวที่ x และสดมภ์ที่ y ของตาราง

เมื่อกำหนดเซตจำกัด S มาให้และเมื่อสร้างตารางสำหรับการดำเนินการทวิภาคบน S เรียบร้อยแล้ว จะเห็นได้ชัดว่าสับเซตใดของ S ที่มีคุณสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการที่กำหนดด้วยตารางนั้นๆหรือไม่ ตัวอย่างเช่น ตาราง 2 และตาราง 3 ทั้งสองข้างล่างนี้เป็นตารางกำหนดการดำเนินการบางส่วนของตาราง 1 ที่ทำให้เห็นชัดว่า {1, -1} และ {1, i} เป็นสับเซตที่มีคุณสมบัติปิด และไม่มีคุณสมบัติปิดตามลำดับ [หมายเหตุ : "x" ในตารางหมายถึงตัวที่เราละไว้จากตารางเดิม]

.	1	x	-1	x
1	1	x	-1	x
x	x	x	x	x
-1	-1	x	1	x
x	x	x	x	x

ตาราง 2

.	1	i	x	x
1	1	i	x	x
i	i	-1	x	x
x	x	x	x	x
x	x	x	x	x

ตาราง 3

บทนิยาม 3 : เราจะกล่าวว่า การดำเนินการ # บนเซต S *สลับที่ (commutative)* สมาชิกของเซต S ได้ หรือ # สอดคล้อง *คุณสมบัติการสลับที่ (Commutative Law)* ถ้า

$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x\#y = y\#x)$

ตัวอย่างเช่น การบวกและการคูณบนเซตของจำนวนจริง หรือการบวกของเมทริกซ์ สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่ แต่การคูณของเมทริกซ์ไม่สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่ เนื่องจาก

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{แต่} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ในกรณีทั่วไปเมื่อจะแสดงว่าการดำเนินการทวิภาค # ที่กำหนดให้บนเซต S สอดคล้องกับคุณสมบัติการสลับที่หรือไม่ เราจะต้องตรวจสอบเงื่อนไข $x\#y = y\#x$ ให้ครบทุกคู่สมาชิก x และ y ของ S ตัวอย่างเช่นเมื่อกำหนด # บนเซตของจำนวนจริง ดังนี้

$$x\#y = xy + 2x + 2y$$

เราจะต้องให้ x และ y เป็นสมาชิกตัวใดก็ได้ของเซต S และดังนั้นโดยนิยามของ # เราจะได้

$$x\#y = xy + 2x + 2y$$

และ $y\#x = yx + 2y + 2x$

ซึ่งทำให้ได้ $x\#y = y\#x$ ด้วยคุณสมบัติการสลับที่ของการบวกและการคูณของ **R**

ในทางตรงกันข้าม ถ้าจะแสดงว่าการดำเนินการ # บนเซต S ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติการสลับที่ นั้นเราเพียงแต่ชี้ให้เห็นสมาชิก x และ y ของ S อย่างน้อยคู่หนึ่งที่ซึ่ง $x\#y \neq y\#x$ ก็เพียงพอแล้ว เพราะเรากำลังแสดงว่านิเสธของข้อความ

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x\#y = y\#x)$$

ซึ่งก็คือข้อความ

$$(\exists x \in S)(\exists y \in S)(x\#y \neq y\#x)$$

เป็นจริงนั่นเอง

ส่วนการดำเนินการบนเซตจำกัด สามารถตรวจสอบได้อย่างง่ายๆว่าสอดคล้องกับคุณสมบัติการสลับที่หรือไม่ โดยดูว่าตารางนั้นมีสมมาตร(symmetry) กับเส้นทะแยงของตารางที่ลากจากการดำเนินการหรือไม่เท่านั้น ทั้งนี้เพราะว่า $x\#y$ และ $y\#x$ จะเกิดขึ้นในตำแหน่งที่เป็นสมมาตรกับเส้นทะแยงดังกล่าว

ตัวอย่างเช่นการดำเนินการ # และ $ ในตาราง 4 และตาราง 5 ข้างล่างนี้จะเห็นว่า # สอดคล้อง แต่ $ ไม่สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่ตามลำดับ

#	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	b

ตาราง 4

$	x	p	r	q
x	x	r	q	p
p	r	q	r	x
r	q	r	r	x
q	p	p	x	x

ตาราง 5

ถ้า # เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต S และ x, y และ z เป็นสมาชิกของ S แล้ว (x#y)#z และ x#(y#z) ต่างก็เป็นสมาชิกของ S เช่นกัน แต่สมาชิกทั้งสองตัวนี้อาจไม่เป็นสมาชิกตัวเดียวกัน เช่นสำหรับการลบ " - " บนเซตของจำนวนจริง เราจะได้

$$0 - (2 - 1) \neq (0 - 2) - 1$$

ดังนั้น ถ้ายังไม่มีการตรวจสอบว่าการดำเนินการทวิภาคใดสอดคล้องกับคุณสมบัติ

$$(x\#y)z = x\#(y\#z)$$

สำหรับทุกๆสมาชิก x, y และ z ของ S แล้วการละวงเล็บเพื่อเขียน

$$x\#y\#z$$

อาจทำให้ได้ข้อผิดพลาด หรือการเข้าใจผิดได้ จึงไม่ควรกระทำ !!! แต่ถ้าหากเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าการดำเนินการใดสอดคล้องคุณสมบัติ

$$(x\#y)\#z = x\#(y\#z)$$

สำหรับทุกๆสมาชิก x, y และ z ของ S ได้แล้ว แสดงว่าสมาชิกทั้งสองของ S เป็นสมาชิกตัวเดียวกัน ทำให้เราสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนสมาชิกที่เท่ากันทั้งสองได้ใหม่เป็น

$$x\#y\#z$$

หรือนั่นคือเราสามารถที่จะละวงเล็บไว้เสียก็ได้

บทนิยาม 4 : เราจะกล่าวว่าการดำเนินการทวิภาค # บนเซต S สอดคล้องคุณสมบัติ *การจัดหมู่ (Associative Law)* ถ้า

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(\forall z \in S)[(x\#y)\#z = x\#(y\#z)]$$

ตัวอย่างเช่น

1. การบวกและการคูณบนเซตของจำนวนจริงสอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ แต่การลบไม่สอดคล้องดังแสดงให้เห็นแล้วในตัวอย่างข้างต้น

2. พิจารณาการดำเนินการ # บนเซต $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ที่กำหนดโดย

$$(a, b)\#(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

จะเห็นว่า ถ้า (a, b), (c, d) และ (e, f) เป็นสมาชิกของ $\mathbf{R}^2$ เราจะได้

$$[(a, b)\#(c, d)]\#(e, f) = (ac - bd, ad + bc)\#(e, f)$$
$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$$

และ

$$(a, b)\#[(c, d)\#(e, f)] = (a, b)(ce - df, cf + de)$$
$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$$

เพราะฉะนั้น # สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่

[ขอให้สังเกตว่า # ในข้อนี้ก็คือการคูณบนเซตของจำนวนเชิงซ้อนนั่นเอง]

3. พิจารณาการดำเนินการ # บนเซตของจำนวนเต็ม ที่กำหนดโดย

$$x\#y = 2x + y$$

จะเห็นว่า ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$(x\#y)\#z = (2x + y)\#z = 2(2x + y) + z = 4x + 2y + z$$

ในขณะที่

$$x\#(y\#z) = x\#(2y + z) = 2x + 2y + z$$

ซึ่งสำหรับ $x \neq 0$ เราจะได้

$$4x + 2y + z \neq 2x + 2y + z$$

ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า # ไม่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ อย่างไรก็ตามถ้า $x=0$ ค่านิพจน์ทางขวามือของสมการทั้งสองจะเท่ากันเพราะเท่ากับ $2y + z$ ดังนั้นการแสดงว่าการดำเนินการใด

ไม่ สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ จึงควร*ยกตัวอย่าง* กรณีเฉพาะที่จะทำให้ได้ข้อความ

$$(\exists x \in S)(\exists y \in S)(\exists z \in S)((x\#y)\#z \neq x\#(y\#z))$$

เป็นจริง เช่น

$$1\#(2\#3) = 1\#7 = 9 \quad \text{แต่} \quad (1\#2)\#3 = 1\#3 = 11$$

เป็นต้น

ถ้า $a, b, c, d \in S$ แล้วนิพจน์ $a\#b\#c\#d$ สามารถถูกจัดหมู่ได้ 5 แบบคือ $((a\#b)\#c)\#d$, $(a\#(b\#c))\#d$, $(a\#b)\#(c\#d)$, $a\#(b\#(c\#d))$, $a\#((b\#c)\#d)$ ซึ่งถ้า # สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ นิพจน์ทั้ง 5 แบบข้างต้นจะแทนสมาชิกตัวเดียวกันของ S และเราจะกล่าวว่านิพจน์ $a\#b\#c\#d$ เป็นอิสระต่อการจัดหมู่ และในกรณีของสมาชิก n ตัวใดๆ ของ S เราก็จะกระทำได้เช่นเดียวกันที่เราเรียกกันว่า *การวางนัยทั่วไปของการจัดหมู่ (General Associativity)* ที่จะแสดงให้เห็นในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซต S ที่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ ถ้า $n \geq 3$ และ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ แล้วนิพจน์

$$x_1\#x_2\#\ldots\#x_n$$

เป็นอิสระต่อการจัดหมู่ หรือนั่นคือ $x_1\#x_2\#\ldots\#x_n$ แทนสมาชิกของ S ตัวเดียวกันไม่ว่าจะจัดหมู่ให้กับนิพจน์ดังกล่าวด้วยแบบใด .

พิสูจน์ : ถ้า $n = 3$ จะได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริงโดยคุณสมบัติการจัดหมู่ของ #

พิจารณานิพจน์

$$w = x_1\#x_2\#\ldots\#x_n$$

เมื่อ $n>3$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะสมมติให้ทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับ

$$x_1\#x_2\#\ldots\#x_k$$

เมื่อ $k<n$ นั่นคือ $x_1\#x_2\#\ldots\#x_k$ เป็นอิสระต่อการจัดหมู่เมื่อ $k<n$ เราจึงให้

$$v = x_1\#(x_2\#(x_3\ldots\#(x_{n-1}\#x_n)\ldots)))$$

เป็นวิธีการจัดหมู่แบบหนึ่งของ w แล้วเราจะแสดงให้ได้ว่าไม่ว่าเราจะจัดหมู่กับนิพจน์ของ w

เป็นแบบใด ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นสมาชิกตัวเดียวกันคือ v เสมอ ซึ่งแสดงว่า w เป็นอิสระต่อการจัดหมู่

ไม่ว่าเราจะจัดหมู่ให้กับ w ในแบบใดก็ตาม โดยข้อสมมติของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะทำให้เราได้นิพจน์ในรูปต่อไปนี้เสมอ คือ

$$w = (x_1\#x_2\#\ldots\#x_r)\#(x_{r+1}\#\ldots\#x_n)$$

โดยที่ $1 \le r \le n-1$

ถ้า $r=1$ เราจะได้ $w = x_1\#(x_2\#\ldots\#x_n)$

ซึ่ง $x_2\#x_3\#\ldots\#x_n$ มีจำนวนของ x_i น้อยกว่า n เราจึงได้ตามสมมติฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า นิพจน์ดังกล่าวเป็นอิสระต่อการจัดหมู่ เพราะฉะนั้น

$$x_2\#x_3\#\ldots\#x_n = x_2\#(x_3\#(x_4\#\ldots(x_{n-1}\#x_n))\ldots)))$$

ซึ่งทำให้ได้ $w = v$

ถ้า $r>1$ โดยข้อสมมติของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับ $r<n$ เราอาจเขียนนิพจน์ $x_1\#x_2\#\ldots\#x_r$ ได้ในแบบ $x_1\#(x_2\#\ldots\#x_r)$ ซึ่งทำให้ได้

$$w = [x_1\#(x_2\#\ldots\#x_r)]\#(x_{r+1}\#\ldots\#x_n)$$

ดังนั้น ถ้าให้ $x = x_1$, $y = x_2\#\ldots\#x_r$ และ $z = x_{r+1}\#\ldots\#x_n$ แล้วโดยคุณสมบัติการจัดหมู่ของ # ทำให้เราได้

$$w = x\#y\#z = x_1\#[(x_2\#\ldots x_r)\#(x_{r+1}\#\ldots\#x_n)]$$

และเช่นเดียวกัน เนื่องจากนิพจน์ $(x_2\#\ldots x_r)\#(x_{r+1}\#\ldots\#x_n)$ มีจำนวนของ x_i น้อยกว่า n เราจึงได้จากข้อสมมติของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$(x_2\#\ldots x_r)\#(x_{r+1}\#\ldots\#x_n) = x_2\#(x_3\#\ldots\#(x_{n-1}\#x_n))\ldots))$$

หรือนั่นคือ $w = v$ ซึ่งเป็นอันสิ้นสุดการพิสูจน์ //

หมายเหตุ : ไม่มีวิธีแสดงอย่างสั้นๆว่าการดำเนินการทวิภาคบนเซตจำกัดสอดคล้องกับคุณสมบัติการจัดหมู่ด้วยตาราง

บทนิยาม 5 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการที่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่บนเซต S ถ้า $b \in S$ และ $n \in \mathbf{N}$ เราจะใช้สัญลักษณ์ b^n แทนผลคูณ

$b\#b\#b\#\ldots\#b$ (n ครั้ง)

และเรียกว่า *กำลังที่ n ของ b (the nth power of b)*

จากบทนิยามนี้เราจะได้ $b^1 = b$, $b^2 = b\#b$, $b^3 = b\#b\#b$ และอื่นๆ

ตัวอย่างเช่น

1. การคูณ . บนเซตของจำนวนจริง เราจะได้ $3^4 = 3.3.3.3 = 81$
2. การบวก + บนเซตของจำนวนจริง เราจะได้ $3^4 = 3+3+3+3 = 12$

เป็นต้น

แบบฝึกหัด 7

กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการที่สอดคล้องกับคุณสมบัติการจัดหมู่บนเซต G และให้ $b \in G$ และ $n, m \in \mathbf{N}$ จงแสดงว่า $b^n\#b^m = b^{n+m}$

บทนิยาม 6 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต S และ $e \in S$ เราจะกล่าวว่า e เป็น *สมาชิกเอกลักษณ์ (identity element)* หรือเรียกสั้นๆว่า *เอกลักษณ์ (identity)* ของ S ภายใต้ # ถ้า

$(\forall x \in S)(x\#e = e\#x = x)$

ตัวอย่างเช่น

1. 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของเซตของจำนวนจริงภายใต้การบวก
2. 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของเซตของจำนวนจริงภายใต้การคูณ
3. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ เป็นเอกลักษณ์ของเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ภายใต้การคูณของเมทริกซ์
4. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ id เป็นเอกลักษณ์ของเซตของฟังก์ชันภายใต้ผลประกอบของฟังก์ชัน
5. 1 ของตาราง 1 และ e ของตาราง 2

ทฤษฎีบท 2 : ถ้า e และ f ต่างเป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของเซต S ภายใต้การดำเนินการ # แล้ว $e = f$

พิสูจน์ : เนื่องจาก e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ S ดังนั้น $e\#x = x$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ และ $f \in S$ เราจึงได้ $e\#f = f$ ในทำนองเดียวกัน f ก็เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ S ดังนั้น $x\#f = x$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ ซึ่ง $e \in S$ เราจึงได้ $e\#f = e$ เพราะฉะนั้น $e = e\#f = f$ //

หมายเหตุ : ความหมายของทฤษฎีบทนี้ ไม่ได้กล่าวว่าทุกๆการดำเนินการจะต้องมีเอกลักษณ์ เพียงแต่บอกว่า หากเซตใดประกอบด้วยสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการใด สมาชิกเอกลักษณ์ของเซตนั้นภายใต้การดำเนินการนั้น จะมีได้อย่างมากเพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 7 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซต S ที่มี e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ ถ้า $a \in S$ และมี $b \in S$ ซึ่ง $a\#b = b\#a = e$ แล้วเราจะเรียก b ว่า *สมาชิกผกผัน (inverse element* หรือ *inverse)* ของ a

ข้อสังเกต : ถ้า b เป็นสมาชิกผกผันของ a แล้ว a จะเป็นสมาชิกผกผันของ b

ตัวอย่างเช่น

1. ถ้า $S = \mathbf{R}$ และ # คือ + แล้ว $e=0$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ และสำหรับแต่ละ $x \in \mathbf{R}$ เราจะได้ $-x$ เป็นสมาชิกผกผันของ x

2. ถ้า S คือเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ # คือการคูณของเมทริกซ์ แล้ว สมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้ # จะคือ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ และในที่นี้สมาชิกผกผันของ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ คือ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ เพราะ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

แต่สำหรับ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ไม่มีสมาชิกผกผัน

โดยทั่วไปสมาชิกผกผันของ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ จะคือ $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ เมื่อใดก็ตามที่ $ad - bc \neq 0$

3. ถ้า S คือเซตของฟังก์ชันจาก **R** ไปยัง **R** และ # คือผลประกอบของฟังก์ชัน แล้ว e = id และในที่นี้ฟังก์ชัน f ของ S จะมีสมาชิกผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงไปบน **R**

หมายเหตุ : ขอให้สังเกตว่าการจะกล่าวถึงสมาชิกผกผันในเซตใดภายใต้การดำเนินการใดก็ตาม จะต้องมีสมาชิกเอกลักษณ์ของเซตนั้นภายใต้การดำเนินการนั้นเสียก่อน ดังนั้นการกล่าวถึงสมาชิกผกผัน จึงต้องกล่าวภายใต้การดำเนินการ และสมาชิกเอกลักษณ์เสมอ

ทฤษฎีบท 3 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการที่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่บนเซต S และ e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ S ภายใต้ # ถ้า b และ c ต่างเป็นสมาชิกผกผันของ a แล้ว b = c

พิสูจน์ : b = b#e (e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์)
= b#(a#c) (c เป็นสมาชิกผกผันของ a)
= (b#a)#c (# สอดคล้องการจัดหมู่)
= e#c (b เป็นสมาชิกผกผันของ a)
= c (e เป็นเอกลักษณ์) //

ข้อสังเกต : การมีสมาชิกผกผันเพียงตัวเดียว อยู่ภายใต้เงื่อนไขของคุณสมบัติการจัดหมู่ของการดำเนินการ เช่น

#	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	e	e
b	b	e	b	b
c	c	e	b	c

เป็นตัวอย่างของการดำเนินการบนเซตที่ไม่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ จึงทำให้ได้ b และ c ต่างเป็นสมาชิกผกผันของ a ภายใต้การดำเนินการ # โดยมี e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

บทนิยาม 8 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซต G และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะใช้สัญลักษณ์ b^{-n} แทนผลคูณ

$$(b^{-1})^n$$

นั่นคือ

$$b^{-n} = (b^{-1}) \#(b^{-1})\# \ldots \# (b^{-1}) \qquad (n \text{ ครั้ง})$$

และเรียกว่า*กำลังที่ -n ของ b (the -n power of b)* [ซึ่งก็คือกำลังที่ n ของสมาชิกผกผันของ b]

หมายเหตุ : ต่อไปนี้ถ้า # เป็นการดำเนินการบนเซต S เราจะใช้สัญลักษณ์แทนความหมายนี้ด้วย <S; #>

ตัวอย่างเช่น

1. $(R - \{0\}, .)$ เรามี $3^{-1} = \frac{1}{3}$ จึงได้ $3^{-4} = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$
2. $(R, +)$ เรามี $3^{-1} = -3$ จึงได้ $3^{-4} = (-3)^4 = -12$

แบบฝึกหัด 8

1. การนิยาม # บนเซตของจำนวนเต็มในข้อต่อไปนี้ # ในข้อใดเป็นการดำเนินการ และในข้อใดไม่เป็น

1.1 $m\#n = mn+1$ 1.2 $m\#n = m+\frac{n}{2}$

1.3 $m\#n = 2^{mn}$ 1.4 $m\#n = \sqrt{mn}$

1.5 $m\#n = 3$ 1.6 $m\#n = m$

2. จงพิจารณาว่าการดำเนินการ # ในข้อใดของข้อ 1 ที่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ การสลับที่ และทำให้เซตของจำนวนเต็มมีสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้ #

3. จงเติมตารางข้างล่างนี้ให้สมบูรณ์

#	u	v
u		
v		

3.1 เพื่อให้ u เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้ # และพิจารณาด้วยว่าจะกระทำได้กี่วิธี

3.2 เพื่อให้ u และ v เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้ # และพิจารณาด้วยว่าจะกระทำได้หรือไม่

4. จงแสดงว่าจะมีสมาชิกเอกลักษณ์ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้นบนเซต S ใดๆ ภายใต้แต่ละการดำเนินการที่กำหนดบน S

5. จงเติมตารางข้างล่างนี้ให้สมบูรณ์เพื่อให้ # สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่ มีสมาชิกเอกลักษณ์ และแต่ละสมาชิกมีสมาชิกผกผัน

#	w	x	y	z
w	y			x
x	z	w		
y				
z				w

6. กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซต S และ T เป็นสับเซตของ S ที่มีคุณสมบัติปิดภายใต้ # จงแสดงถ้า # สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่บน S แล้ว # จะสอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่บน T ด้วย

7. กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการ ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่บนเซต S จงแสดงว่า

$$a_1\#(a_2\#(a_3\#a_4)) = a_1\#((a_2\#a_3)\#a_4)$$
$$= (a_1\#(a_2\#a_3))\#a_4 = (a_1\#a_2)\#(a_3\#a_4)$$
$$= ((a_1\#a_2)\#a_3)\#a_4$$

8. กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง # เป็นการดำเนินการบน S ที่มี e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ และสำหรับ a, b, c และ d ซึ่งเป็นสมาชิกใดๆของ S จะได้ว่าสมการ

$$(a\#b)\#(c\#d) = (a\#c)\#(b\#d)$$

เป็นจริง จงแสดงว่า # สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ และการสลับที่

9. กำหนดให้ S เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกมากกว่าหรือเท่ากับ 2 และนิยามการดำเนินการ # บน S โดย

$$a\#b = b$$

เมื่อ a และ b เป็นสมาชิกใดๆของ S จงแสดงว่า # ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติการสลับที่ และ S ไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้ #

4.2.2 ข้อสังเกตเกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบททางพีชคณิต

การพิสูจน์ทฤษฎีบทหรือการบ้านทางพีชคณิตที่กล่าวผ่านมาแล้ว หรือที่จะมีตามมาภายหลัง มีข้อน่าสังเกตหรือเป็นเอกลักษณ์เฉพาะการพิสูจน์ ดังต่อไปนี้

1. บ่อยครั้งเราจะพบว่าในขั้นตอนการพิสูจน์ มีการแสดงว่าสมการหรือเอกลักษณ์เป็นจริง ซึ่งเราสามารถแสดงได้ 2 วิธีคือ

วิธีที่ 1 : เราอาจเริ่มต้นที่ข้างใดข้างหนึ่งของสมการหรือเอกลักษณ์ แล้วกระทำจนกระทั่งได้ผลเป็นอีกข้างหนึ่งของสมการหรือเอกลักษณ์นั้น เช่น

ตัวอย่าง 1 : จงแสดงว่า

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})[(x - y)(x + y) + y(1 + y) = y + x^2$$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $x \in \mathbf{R}$ และ $y \in \mathbf{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= (x - y)(x + y) + y(1 + y) \\ &= x^2 - y^2 + y + y^2 \\ &= x^2 + y \\ &= y + x^2 \quad = \quad \text{R.H.S.} \quad // \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 : ถ้าทั้งสองข้างของสมการหรือเอกลักษณ์อยู่ในรูปนิพจน์ที่ยุ่งยาก เราจะนำแต่ละข้างของสมการหรือเอกลักษณ์มาทำให้อยู่ในรูปเดียวกันที่ง่ายขึ้น เช่น

ตัวอย่าง 2 : จงแสดงว่า ถ้าเรานิยามการดำเนินการ # บน $\mathbf{R}$ โดย $a\#b = a + b + ab$ แล้ว # สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่

พิสูจน์ : เราจะต้องแสดงว่าข้อความ "$(\forall a, b, c \in \mathbf{R})[(a\#b)\#c = a\#(b\#c)]$" เป็นจริง

ให้ $a, b, c \in \mathbf{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned} (a\#b)\#c &= (a + b + ab)\#c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} a\#(b\#c) &= a\#(b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$a\#(b\#c) = (a\#b)\#c \quad //$$

ข้อสังเกต : ข้อผิดพลาดที่มักพบเสมอในการเขียนการพิสูจน์สมการหรือเอกลักษณ์ เช่นดังตัวอย่างข้างต้น หลายๆคนจะพยายามเขียนการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

$$(a\#b)\#c = a\#(b\#c)$$

$$\Rightarrow (a + b + ab)\#c = a\#(b + c + bc)$$

$$\Rightarrow a + b + ab + c + (a + b + ab)c = a + b + c + bc + a(b + c + bc)$$

$$\Rightarrow ab + (a + b + ab)c = bc + a(b + c + bc) \qquad \text{(กฎการตัดออก)}$$

$$\Rightarrow ab + ac + bc + abc = bc + ab + ac + abc$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

แล้วจะเขียนต่อว่า :-

เนื่องจาก $0 = 0$ เป็นจริง เราจึงได้

$$(a\#b)\#c = a\#(b\#c)$$

หรือบางครั้งจะอ้างว่า เนื่องจาก

$$ab + ac + bc + abc = bc + ab + ac + abc$$

เป็นจริง จึงได้ว่า

$$(a\#b)\#c = a\#(b\#c)$$

สาเหตุที่กล่าวว่าการพิสูจน์ข้างต้นไม่ถูกต้อง เนื่องจากเรานำสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ขึ้นมาเขียนไว้ในบรรทัดแรกเป็นข้อสมมติ หรือนั่นคือสมมติให้สิ่งที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริงเสียแล้ว เหมือนกับเราเริ่มต้นการพิสูจน์ด้วยข้อความ p แล้วมาจบด้วยข้อความเป็นจริง q แล้วกลับพยายามสรุปว่า p เป็นจริงทั้งๆที่อาจจะมีกรณีที่ p เป็นเท็จได้ เพราะ

" $p \rightarrow q$ เป็นจริง โดยที่ q เป็นจริงนั้น p อาจเป็นเท็จได้"

หรือนั่นคือ

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \qquad\qquad} \\ \therefore\ p \end{array}$$

เป็นตรรกบทที่ไม่สมเหตุสมผล เช่นให้ p เป็นข้อความ "$0=1$" แล้วได้

$$0 = 1$$

$\Rightarrow \quad 0.0 = 0.1$

$\Rightarrow \quad 0 = 0$

ซึ่งข้อความ q คือ "0=0" เป็นจริงเสมอ แต่เราจะสรุปว่า p คือ "0=1" เป็นจริงไม่ได้ ดังนั้นจึงควรรำลึกไว้เสมอเมื่อเขียนการพิสูจน์ใดก็ตาม จะต้องไม่นำข้อความที่ต้องการพิสูจน์เขียนไว้ในบรรทัดแรก หรือให้เป็นข้อสมมติของการพิสูจน์

2. บ่อยครั้งที่พบว่าเราต้องพิสูจน์ข้อความที่ขึ้นต้นด้วย "ทุกๆ" เช่น

$(\forall x \in \mathbf{R})(\ .\ .\ .\ .\ .\ )$

วิธีดีที่สุดสำหรับเริ่มต้นการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว คือเขียนขึ้นต้นด้วย

"ให้ $x \in \mathbf{R}$ แล้ว . . . . . "

หรือ

"ถ้า $x \in \mathbf{R}$ แล้ว . . . . . "

ดังเช่นที่กล่าวไว้แล้วในข้อแนะนำการพิสูจน์ที่เกี่ยวกับเซต

ตัวอย่าง 3 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนจริง ที่กำหนดโดย

$a\#b = ab + 2a + 2b + 2$

จงแสดงว่า -1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ $\mathbf{R}$ ภายใต้ #

พิสูจน์ : [เราต้องแสดงว่าข้อความ "$(\forall x \in R)(x\# -1 = x$ และ $-1\#x = x)$" เป็นจริง]

ให้ $x \in \mathbf{R}$ แล้ว

$x\# -1 = x(-1) + 2x + 2(-1) + 2 = x$

และ $-1\#x = (-1)x + 2(-1) + 2x + 2 = x$ //

ตัวอย่าง 4 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนจริง ที่นิยามโดย

$a\#b = |a-b| + a(b-a) - b^2$

จงแสดงว่า # สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่

ได้
จน์

พิสูจน์ : [เราต้องแสดงว่าข้อความ "$(\forall a, b \in \mathbf{R})(a\#b = b\#a)$" เป็นจริง]

ให้ $a, b \in \mathbf{R}$ แล้ว

$$a\#b = |a-b| + a(b-a) - b^2$$
$$= |a-b| + ab - a^2 - b^2$$

และ $$b\#a = |b-a| + b(a-b) - a^2$$
$$= |b-a| + ba - b^2 - a^2$$

เนื่องจาก $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$ เราจะได้

$$|a-b| + ab - a^2 - b^2 = |b-a| + ba - b^2 - a^2$$

เพราะฉะนั้น $a\#b = b\#a$ //

3. ในวิชาพีชคณิตเรามักพบข้อความที่ต้องพิสูจน์เกี่ยวกับ*การมี* สมาชิกลักษณะเฉพาะอย่างหนึ่งอยู่เสมอๆ เช่นการให้แสดงว่ามีสมาชิกเอกลักษณ์ของเซต หรือมีสมาชิกผกผันของแต่ละสมาชิก ของเซตภายใต้การดำเนินการหนึ่ง เป็นต้น เราจะดำเนินวิธีการโดยการสำรวจหาสมาชิกที่ต้องการเหล่านั้นเสียก่อน แล้วจึงนำกลับมาพิสูจน์แบบตรวจสอบหรือแสดงให้เห็นจริงว่ามีสมาชิก เช่นนั้น สอดคล้องกับคุณสมบัติตามต้องการ

ตัวอย่าง 5 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนจริง $\mathbf{R}$ ที่นิยามโดย

$$x\#y = 3xy + 7x + 7y + 14$$

จงแสดงว่ามีเอกลักษณ์ e ของ $\mathbf{R}$ ภายใต้ #

พิสูจน์ :

การสำรวจ : เราต้องการสมาชิก $e \in \mathbf{R}$ ซึ่งสอดคล้องว่าสำหรับแต่ละ $x \in \mathbf{R}$ เราต้องได้สมการ

$$x\#e = x = e\#x$$

หรือ

$$3xe + 7x + 7e + 14 = x \quad \text{และ} \quad 3ex + 7e + 7x + 14 = x$$

ซึ่งทั้งสองสมการเป็นสมการเดียวกัน ดังนั้น

$$3xe + 7x + 7e + 14 = x$$

$\Rightarrow \quad 3xe + 6x + 7e + 14 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x(e + 2) + 7(e + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad (3x + 7)(e + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -\frac{7}{3}$ หรือ $e = -2$

แต่เราต้องการให้ได้ e สำหรับทุกๆ $x \in \mathbf{R}$ เราจึงเดา ว่า $e = -2$ แล้วนำไปตรวจสอบ

การตรวจสอบ : ให้ $e = -2$ และ $x \in \mathbf{R}$ แล้ว

$$x\#e = x\# -2 = 3x(-2) + 7x + 7(-2) + 14 = x$$

และ

$$e\#x = -2\#x = 3(-2)x + 7(-2) + 7x + 14 = x$$

เพราะฉะนั้น $e=-2$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ $\mathbf{R}$ ภายใต้ # หรือนั่นคือ มีสมาชิกเอกลักษณ์ของ $\mathbf{R}$ ภายใต้ # //

ตัวอย่าง 6 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนจริง $\mathbf{R}$ ที่นิยามดังตัวอย่าง 5 จงแสดงว่าสำหรับแต่ละสมาชิก $x \in \mathbf{R}$ ซึ่ง $x \neq -\frac{7}{3}$ มีสมาชิกผกผันภายใต้ #

พิสูจน์ : ให้ $x \in R$ และ $x \neq -\frac{7}{3}$

การสำรวจ : เราต้องการ $\hat{x} \in \mathbf{R}$ ซึ่ง $x\#\hat{x} = -2$ และ $\hat{x}\#x = -2$ หรือนั่นคือ

$$3x\hat{x}+7x+7\hat{x}+14 = -2 \quad \text{และ} \quad 3\hat{x}x+7\hat{x}+7x+14 = -2$$

ดังนั้น

$$3x\hat{x} + 7\hat{x} = -7x - 16$$

หรือ $\hat{x}(3x + 7) = -7x - 16$

หรือ $\hat{x} = \frac{-7x - 16}{3x + 7}$ เมื่อ $x \neq -\frac{7}{3}$

การตรวจสอบ : เนื่องจาก $x \neq -\frac{7}{3}$ ดังนั้น $3x + 7 \neq 0$ เราจึงได้ $\frac{-7x - 16}{3x + 7} \in \mathbf{R}$

และ $x\#\frac{(-7x-16)}{3x+7} = 3x\frac{(-7x-16)}{3x+7} + 7x + 7\frac{(-7x-16)}{3x+7} + 14$

แต่ $x \# \frac{(-7x-16)}{3x+7} = [3x(-7x-16) + 7x(3x+7) + 7(-7x-16) + 14(3x+7)] / (3x+7)$

$= [-21x^2 - 48x + 21x^2 + 49x - 49x - (7)(16) + 42x + (7)(14)] / (3x+7)$

$= [-6x + 7(14-16)] / (3x+7)$

$= [-6x - 14] / (3x+7)$

$= -2$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\frac{(-7x-16)}{3x+7} \# x = -2$

เพราะฉะนั้น

$\hat{x} = \frac{-7x-16}{3x+7}$ เป็นสมาชิกผกผันของ x //

4. บ่อยครั้งที่เราจะต้องแสดงว่าข้อความที่กำหนดให้บางข้อความเป็นเท็จ และในการแสดงว่าข้อความ p เป็นเท็จ เราจะเขียนนิเสธของข้อความ p ซึ่งก็คือ $\neg p$ และพยายามพิสูจน์ให้ได้ว่า $\neg p$ เป็นจริง แต่บ่อยครั้งที่เราพบว่าการแสดงว่า $\neg p$ เป็นจริงทำได้โดยการยกตัวอย่างเฉพาะขึ้นมาให้เห็นเท่านั้นก็เพียงพอ ซึ่งในกรณีเช่นนี้ เราจะเรียกตัวอย่างเฉพาะที่ยกขึ้นมานี้ว่า "*ตัวอย่างค้านข้อความ p*" *(a counter example to the statement p)*

ตัวอย่าง 7 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนธรรมชาติ **N** ที่นิยามโดย

$a\#b = ab^2$

จงแสดงว่า # ไม่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่

พิสูจน์ : เราจะต้องแสดงว่า มี $a, b, c \in \mathbf{N}$ ซึ่ง $a\#(b\#c) \neq (a\#b)\#c$ โดยพิจารณา

$(a\#b)\#c = (ab^2)\#c = ab^2c^2$

ในขณะที่

$a\#(b\#c) = a\#(bc^2) = a(bc^2)^2 = ab^2c^4$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้า $a=1, b=1$ และ $c=2$ แล้ว

$(1\#1)\#2 = (1)(1)^2(2^2) = 4$

แต่ $1\#(1\#2) = (1)(1^2)(2^4) = 16$

เพราะฉะนั้น # ไม่สอดคล้องกับการจัดหมู่ //

ข้อสังเกต : 1. บางครั้งจะมีผู้เขียนการพิสูจน์ของตัวอย่าง 7 ข้างต้นดังนี้ :-

" $(a\#b)\#c = ab^2c^2$ และ $a\#(b\#c) = ab^2c^4$ แต่ $ab^2c^2 \neq ab^2c^4$ จึงได้ว่า # ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติการจัดหมู่"

การเขียนพิสูจน์เช่นนี้จะให้ความสมเหตุสมผลไม่เพียงพอ เนื่องจากมีบางค่าของจำนวนธรรมชาติ a, b และ c ซึ่ง $ab^2c^2 = ab^2c^4$ การสรุปในย่อหน้าก่อนจึงไม่ถูกต้องสำหรับกรณีของ a, b และ c เช่นว่านี้ ดังนั้นเราจึง ควร ให้ค่าแน่นอนของ a, b และ c ที่จะแสดงว่า ab^2c^2 และ ab^2c^4 ไม่เท่ากัน

2. การแสดงการพิสูจน์ของตัวอย่าง 7 ข้างต้นเพียงพอที่จะสรุป หรือทำให้สังเกตได้ว่า # สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ ถ้า # จะนิยามบนเซต $S = \{-1, 0, 1\}$ โดย $a\#b = ab^2$

5. การพิสูจน์แบบหนึ่งคือเมื่อต้องการให้ได้ข้อสรุปเป็น p เราจะให้นิเสธของข้อความ p หรือนั่นคือ $\neg p$ เป็นสมมติฐานของเรา แล้วจากสมมติฐาน $\neg p$ นี้นำเราไปสู่ข้อความขัดแย้งกันเองหรือที่เรียกกันว่า *"การพิสูจน์ในทางขัดแย้ง (Proof by Contradiction)"* หรือ *การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof)* (ดูวิธีการพิสูจน์ในบทที่ 2) ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ที่สำคัญมากและใช้กันบ่อยเมื่อได้ศึกษาในแขนงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนและยุ่งยากมากขึ้น

ตัวอย่าง 8 : กำหนดให้ # เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนเต็ม **Z** ที่นิยามโดย

$$a\#b = a\,|b|$$

จงแสดงว่า ไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์ของ **Z** ภายใต้ #

พิสูจน์ : สมมติว่า $e \in \mathbf{Z}$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ **Z** ภายใต้ # [นั่นคือเรากำลังสมมติว่ามีสมาชิกเอกลักษณ์ของ **Z** ภายใต้ #] ดังนั้นสำหรับทุกๆ $a \in \mathbf{Z}$ เราจะได้

$$a\#e = a \quad \text{และ} \quad e\#a = a$$

นั่นคือ $a|e| = a$ และ $e|a| = a$

แต่ $2 \in \mathbf{Z}$ ทำให้ได้

$e|2| = 2$

$\Rightarrow \quad e(2) = 2$

$\Rightarrow \quad e = 1$

ซึ่งแสดงว่า ถ้ามีเอกลักษณ์ของ **Z** ภายใต้ # แล้วสมาชิกเอกลักษณ์นั้นต้องเป็น 1

สมมติให้ 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ **Z** ภายใต้ # และพิจารณา $a = -2 \in \mathbf{Z}$ ดังนั้นเราต้องได้

$e\#a = a$

หรือ $1\#(-2) = -2$ แต่ $1\#(-2) = 1|2| = 2 \neq -2$ ซึ่งขัดแย้งกันเอง แสดงว่า 1 ไม่ใช่สมาชิกเอกลักษณ์ จึงขัดแย้งกับข้อสมมติ เราจึงสรุปว่าไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์ของ **Z** ภายใต้ # //

แบบฝึกหัด 9

กำหนดให้ G เป็นเซต จงแสดงว่าการดำเนินการ # ที่นิยามบน G ในแต่ละข้อต่อไปนี้ สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่หรือไม่ และจงยกตัวอย่างค้านสำหรับการดำเนินการที่ไม่สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่

1. เมื่อ G เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ $a\#b = 0$
2. เมื่อ G เป็นเซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับ 1 และ $a\#b = a + b - ab$
3. เมื่อ G เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ $a\#b = \min\{a, b\}$ โดยที่

$$\min\{a, b\} = \begin{cases} a & , a < b \\ b & , a > b \end{cases}$$

4. เมื่อ G เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และ $a\#b = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$

โดยที่ $$\max\{a, b\} = \begin{cases} a & , a > b \\ b & , a < b \end{cases}$$

5. เมื่อ G เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของจำนวนจริง และ

$\langle a, b\rangle\#\langle c, d\rangle = \langle ac - bd, ad + bc\rangle$

4 . 3 โครงสร้างพีชคณิต

พีชคณิต(Algebra) เป็นแขนงวิชาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของสมาชิกในเซตภายใต้การดำเนินการบนเซตนั้น

ถ้ากำหนดให้*เซต* เป็นคำอนิยาม และ*การดำเนินการ* บนเซตนั้นเป็นความสัมพันธ์อนิยามสอดคล้องกับสัจพจน์ชุดหนึ่ง จะได้ระบบสัจพจน์ทางพีชคณิตขึ้นระบบหนึ่ง ซึ่งเราจะเรียกว่า *โครงสร้างพีชคณิต (Algebraic Structure)* และสำหรับโครงสร้างพีชคณิตที่เมื่อสอดคล้องกับโลกความเป็นจริงแล้วปรากฏว่ามีการประยุกต์อย่างกว้างขวาง เช่นการประยุกต์ในระบบวงจรไฟฟ้า ระบบฐานข้อมูล และวิศวกรรมเคมี เป็นต้น ได้แก่ พีชคณิตของบูล กลุ่ม วง และฟิลด์เป็นต้น

ในหัวข้อนี้จึงขอยกตัวอย่างโครงสร้างพีชคณิตที่เป็นพื้นฐานสำคัญของการศึกษาพีชคณิตโดยทั่วไป มาศึกษากันในรูปของระบบสัจพจน์ พอเป็นสังเขป

4 . 3 . 1 พีชคณิตของบูล

นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ จอร์จ บูล (George Boole) ได้สร้างระบบสัจพจน์ขึ้นระบบหนึ่งโดยกำหนดให้ U เป็นเซต $\vee$, $\wedge$ และ $'$ เป็นการดำเนินการบน U ที่สอดคล้องกับสัจพจน์ต่อไปนี้

B1: สำหรับสมาชิก a และ b ใน U เราจะได้ $a\wedge b$ และ $a\vee b$ ต่างเป็นสมาชิกของ U ด้วย

B2: สำหรับสมาชิก a และ b ใน U เราจะได้

$a\wedge b = b\wedge a$ และ $a\vee b = b\vee a$

B3: มี 0 และ 1 ใน U ที่ซึ่งสำหรับแต่ละ a ใน U จะได้

$a\vee 0 = a$ และ $a\wedge 1 = a$

B4: สำหรับสมาชิก a, b และ c ใน U เราจะได้

$a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$ และ $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

B5: สำหรับแต่ละ a ใน U จะมี a' ใน U เพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่ซึ่ง

$a\vee a' = 1$ และ $a\wedge a' = 0$

ทฤษฎีบท 1 : ถ้า $a \in U$ แล้ว $a \vee a = a$ และ $a \wedge a = a$

พิสูจน์ : 1. $a = a \vee 0$ (B3.)

2. $a = a \vee (a \wedge a')$ (1, B5.)

3. $a = (a \vee a) \wedge (a \vee a')$ (2, B4.)

4. $a = (a \vee a) \wedge 1$ (3, B5.)

5. $a = a \vee a$ (4, B3.) //

ทฤษฎีบท 2 : ถ้า a เป็นสมาชิกของ U แล้ว $a \vee 1 = 1$ และ $a \wedge 0 = 0$

ทฤษฎีบท 3 : ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ U แล้ว $a \wedge (a \vee b) = a$ และ $a \vee (a \wedge b) = a$

ทฤษฎีบท 4 : ถ้า a, b และ c เป็นสมาชิกของ U แล้ว

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ และ $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

ทฤษฎีบท 5 : ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ U แล้ว

$(a \vee b)' = a' \wedge b'$ และ $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

บทนิยาม 1 : กำหนดให้ a และ b เป็นสมาชิกของ U เราจะกล่าวว่า a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$a \leq b$" ถ้า $a \vee b = b$

ทฤษฎีบท 6 : ถ้า $a \in U$ แล้ว $a \leq a$

พิสูจน์ : 1. $a \vee a = a$ (ทฤษฎีบท 1)

2. $a \leq a$ (1, บทนิยาม 1) //

ทฤษฎีบท 7 : กำหนดให้ a และ b เป็นสมาชิกของ U ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq a$ แล้ว $a = b$

ทฤษฎีบท 8 : กำหนดให้ a, b และ c เป็นสมาชิกของ U ถ้า $a \le b$ และ $b \le c$ แล้ว $a \le c$

ทฤษฎีบท 9 : ถ้า $a \in U$ แล้ว $0 \le a \le 1$

ทฤษฎีบท 10 : กำหนดให้ a และ b เป็นสมาชิกของ U แล้ว

$a \le b$ ก็ต่อเมื่อ $a \wedge b = a$

บทนิยาม 2 : กำหนดให้ U เป็นเซต 0 และ 1 เป็นสมาชิกของ U โดยมี $\wedge$, $\vee$ และ $'$ เป็นการดำเนินการบน U ซึ่งสอดคล้อง B1 ถึง B5 แล้วเราจะเรียกโครงสร้างพีชคณิต $< U; \wedge, \vee, ', 0, 1 >$ ว่า *พีชคณิตของบูล (Boolean Algebra)*

โดยแบบฝึกหัด 1 จะเห็นว่าถ้า A เป็นเซต และ P(A) เป็นสัญลักษณ์แทนเซตของสับเซตทั้งหมดของ A แล้วโครงสร้างพีชคณิต $< P(A), \cup, \cap, ', \phi, A >$ คือตัวอย่างพีชคณิตของบูลในทฤษฎีเซตที่มี U คือ P(A) ; 0 คือเซตว่าง ϕ ; 1 คือ A และ $\wedge$, $\vee$ และ $'$ คือ $\cap$, $\cup$ และเซตเติมเต็ม $'$ ตามลำดับ

แต่ถ้าให้ U เป็นเซตของประพจน์ในตรรกศาสตร์ $\wedge$, $\vee$ และ $'$ (หรือ $\neg$) เป็นตัวเชื่อมความร่วม ตัวเชื่อมการเลือก และตัวเชื่อมนิเสธ โดยมี T และ C แทนสัจนิรันดร์และข้อความที่เป็นเท็จในทุกกรณี แล้ว T จะคือ 1 และ C จะคือ 0 ของโครงสร้างพีชคณิต $< U, \wedge, \vee, \neg, T, C >$ ซึ่งเป็นตัวอย่างพีชคณิตของบูลที่ทำให้เราสามารถศึกษาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้ในเชิงพีชคณิต นอกจากนี้ยังทำให้เกิดการประยุกต์ในระบบวงจรไฟฟ้า และระบบฐานข้อมูล เป็นต้น

แบบฝึกหัด 10

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทในระบบพีชคณิตของบูลข้างต้น

4.3.2 กลุ่ม วง และฟิลด์

นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ กาลัวซ์ (Galois) ได้สร้างระบบสัจพจน์ขึ้นระบบหนึ่ง โดยกำหนดให้ G เป็นเซตของสมาชิก a, b, c, . . . ซึ่งเป็นคำอนิยาม และการดำเนินการ # บน G เป็นความสัมพันธ์อนิยามระหว่างสมาชิกของ G ที่สอดคล้องกับสัจพจน์ 4 ข้อต่อไปนี้

G1: สำหรับสมาชิก a และ b ของ G เราจะได้ a#b เป็นสมาชิกของ G ด้วย
[นั่นคือ G มีคุณสมบัติปิดภายใต้ #]

G2: สำหรับสมาชิก a, b และ c ของ G เราจะได้

$a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$

[นั่นคือ # สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่]

G3: มีสมาชิก e ของ G ที่ซึ่งสำหรับแต่ละสมาชิก a ของ G เราจะได้

$a\#e = a = e\#a$

[นั่นคือมี e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ G ภายใต้ #]

G4: สำหรับแต่ละ a ของ G จะมี a^{-1} ของ G ที่ทำให้

$a\#a^{-1} = e = a^{-1}\#a$

[นั่นคือแต่ละสมาชิกของ G มีสมาชิกผกผันภายใต้ #]

บทนิยาม 1 : กำหนดให้ G เป็นเซต และ # เป็นการดำเนินการบน G ที่สอดคล้องกับสัจพจน์ G1 ถึง G4 แล้วเราจะเรียกโครงสร้างพีชคณิต <G; #> ว่า *กลุ่ม (Group)*

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของกลุ่ม

1. $<\mathbf{R}; +>$ เนื่องจาก

- การบวกบนเซตของจำนวนจริง เป็นการดำเนินการที่สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่
- 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $\mathbf{R}$ ภายใต้การบวก + เพราะสำหรับแต่ละ $x \in \mathbf{R}$ เราจะได้

$x+0 = x = 0+x$

- สำหรับแต่ละ $x \in \mathbf{R}$ เรามี $-x \in \mathbf{R}$ ที่สอดคล้องสมการ $x+(-x) = 0 = (-x)+x$

ซึ่งแสดงว่า $-x$ เป็นสมาชิกผกผันของแต่ละ $x \in \mathbf{R}$ ภายใต้ $+$

2. $<\mathbf{R}^*; .>$ เมื่อ $\mathbf{R}^*$ แทนเซตของจำนวนจริงที่ไม่รวม 0 เนื่องจาก
- เซตของจำนวนจริงที่ไม่รวม 0 มีคุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ .
- 1 เป็นเอกลักษณ์ของ $\mathbf{R}^*$
- สำหรับแต่ละ $x \in \mathbf{R}$ เรามี $\frac{1}{x}$ เป็นสมาชิกผกผันภายใต้การคูณ .

3. กำหนดให้ T_n แทนเซตของเมทริกซ์จตุรัสขนาด n ที่ซึ่งดิเทอร์มินันต์ไม่เป็นศูนย์ แล้ว T_n เป็นกลุ่มภายใต้การดำเนินการ *การคูณระหว่างเมทริกซ์* ทั้งนี้เนื่องจากเราทราบว่า
- การคูณระหว่างเมทริกซ์สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่
- การคูณระหว่างเมทริกซ์จตุรัสที่มีดิเทอร์มินันต์ไม่เป็นศูนย์จะได้เมทริกซ์จตุรัสที่มีดิเทอร์มินันต์ไม่เป็นศูนย์ด้วย
- เอกลักษณ์ของ T_n คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกบนเส้นทะแยงเป็น 1 และนอกนั้นเป็นศูนย์หมด
- สุดท้าย เมทริกซ์ที่มีดิเทอร์มินันต์ไม่เป็นศูนย์จะมีเมทริกซ์ผกผัน ซึ่งจะเป็นสมาชิกผกผันของเมทริกซ์นั้นใน T_n ภายใต้การคูณระหว่างเมทริกซ์

และต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของโครงสร้างพีชคณิตที่ไม่เป็นกลุ่ม

1. $<\mathbf{N}; ->$ เพราะว่า การลบ "-" ไม่เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนธรรมชาติ (หรือนั่นคือ เซตของจำนวนธรรมชาติไม่มีคุณสมบัติปิดภายใต้การลบ)

2. $<\mathbf{Z}; ->$ เพราะว่า การลบ "-" ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติการจัดหมู่บนเซตของจำนวนเต็ม [เช่น $(2 - 3) - 1 = -2$ แต่ $2 - (3 - 1) = 0$ เป็นต้น]

3. $<\mathbf{Z} - \{0\}; +>$ เพราะว่าไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์ของ $\mathbf{Z} - \{0\}$ ภายใต้การบวก "+"

4. $<\mathbf{R}; .>$ เพราะแม้ว่า 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของเซตของจำนวนจริงภายใต้การคูณ "." ก็ตาม แต่มีสมาชิกตัวหนึ่งของ $\mathbf{R}$ คือ 0 ที่ไม่มีสมาชิกผกผัน

ข้อสังเกต : การดำเนินการ # ของกลุ่ม G ไม่จำเป็นต้องสอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่ ตัวอย่างเช่นกลุ่มของตัวอย่าง 3 เมื่อ n = 2 เราจะได้ว่า $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ และ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ต่างเป็นสมาชิกของ T_2 แต่

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1 : ถ้า a, b และ c เป็นสมาชิกของกลุ่ม <G; #> และ a#c = b#c แล้ว a = b

ทฤษฎีบท 2 : ถ้า a เป็นสมาชิกของกลุ่ม G แล้ว $(a^{-1})^{-1} = a$

ทฤษฎีบท 3 : แต่ละคู่สมาชิก a และ b ของกลุ่ม <G; #> จะมีสมาชิก x ของ G เพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ a#x = b

พิสูจน์ : กำหนดให้ a และ b เป็นสมาชิกของกลุ่ม G และเลือก $x = a^{-1}\#b$ แล้ว

$a\#x = a\#(a^{-1}\#b)$ (โดยการแทน $x = a^{-1}\#b$)

$= (a\#a^{-1})\#b$ (โดย G2.)

$= e\#b$ (โดย G4.)

$= b$ (โดย G3.)

ต่อไปสมมติให้ c เป็นสมาชิกของ G ที่ซึ่ง a#c = b แล้ว

$c = e\#c$ (โดย G3.)

$= (a^{-1}\#a)\#c$ (โดย G4.)

$= a^{-1}\#(a\#c)$ (โดย G2.)

$= a^{-1}\#b$ (โดยการแทน a#c = b) //

ข้อสังเกต : การพิสูจน์ว่า *มีเพียงหนึ่งเดียว* จะประกอบด้วยการพิสูจน์ 2 ขั้นตอนดังการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3 ข้างต้นเสมอ

ทฤษฎีบท 4 : ถ้า a และ x เป็นสมาชิกของกลุ่ม $<G; \#>$ ที่ซึ่ง $a\#x = a$ แล้ว $x = e$

แบบฝึกหัด 11

บทนิยาม : เราจะเรียกกลุ่ม $<G;\#>$ ว่า *กลุ่มสลับที่ (commutative group)* หรือ *กลุ่มอาบีเลียน (abelian group)* ถ้า # สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่

1. โครงสร้างพีชคณิตของข้อใดต่อไปนี้เป็นกลุ่ม และของข้อใดเป็นกลุ่มสลับที่

   1.1 $<\mathbf{Q}; + >$ 1.2 $<\mathbf{Q}; . >$

   1.3 < เซตของจำนวนจริงบวก ; . >

   1.4 $<\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R}$ และ $a, b \neq 0\}$; การคูณของเมทริกซ์>

   1.5 $< \mathbf{O}(n)$; การคูณของเมทริกซ์>

   1.6 $<\{z \in C \mid |z| = 1\}$; การคูณของจำนวนเชิงซ้อน>

2. จงแสดงว่า

   2.1 สมาชิกเอกลักษณ์ของแต่ละกลุ่ม มีได้เพียงตัวเดียว

   2.2 สมาชิกผกผันของแต่ละสมาชิกในกลุ่ม มีได้เพียงตัวเดียว

3. กำหนดให้ $<G; \#>$ เป็นกลุ่ม จงแสดงว่า

   3.1 ถ้า $a, b, c \in G$ ซึ่ง $a\#b = a\#c$ แล้ว $b = c$

   3.2 ถ้า $a, b, c \in G$ ซึ่ง $a\#c = b\#c$ แล้ว $a = b$

4. กำหนดให้ $<G; \#>$ เป็นกลุ่ม และเราจะใช้สัญลักษณ์ x^{-1} แทนสมาชิกผกผันของแต่ละ $x \in G$ จงแสดงว่า ถ้า $a, b \in G$ แล้ว $(a\#b)^{-1} = b^{-1}\#a^{-1}$

5. กำหนดให้ $<G; \#>$ เป็นกลุ่ม และ $a, b \in G$ จงแสดงว่าสมการ

   $a\#x = b$ และ $x\#a = b$

   แต่ละสมการมีคำตอบใน G เพียงคำตอบเดียว

6. จงหาเมทริกซ์ D ขนาด 2×2 ทั้งหมดที่ทำให้สมการ

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

เป็นจริง

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทของกลุ่ม

บทนิยาม 2 : กำหนดให้ R เป็นเซต o และ # เป็นการดำเนินการบน R ที่สอดคล้องคุณสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

R1: <R; #> เป็นกลุ่มสลับที่

R2: o สอดคล้องคุณสมบัติปิด และคุณสมบัติการจัดหมู่บน R

R3: การดำเนินการ o สอดคล้องคุณสมบัติ*การกระจาย (distributive)* เหนือ # นั่นคือ

$(\forall x, y, z \in R)[xo(y\#z) = (xoy)\#(xoz)]$

แล้วเราจะเรียกโครงสร้างพีชคณิต <R; #, o> ว่า *วง (ring)*

ตัวอย่างของวงที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายได้แก่ วงของจำนวนเต็มกับการดำเนินการ การบวกและการคูณ

ถ้าการดำเนินการตัวที่สอง o ของวงใดสอดคล้องคุณสมบัติการมีเอกลักษณ์ เราจะเรียกสมาชิกเอกลักษณ์ของการดำเนินการนี้ว่า *สมาชิกหน่วย(unit element)* และดังนั้นเราจะเรียกสมาชิกเอกลักษณ์ของกลุ่มสลับที่ <R; #> ว่า *ศูนย์ (zero)* ของวง

สังเกตว่าการดำเนินการ o ของวงกับเซต R ไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับสัจพจน์ของการเป็นกลุ่ม และดังนั้นจึงเป็นธรรมดาที่เราจะพิจารณาให้ชื่อโครงสร้างพีชคณิตที่ประกอบด้วยเซตๆหนึ่งกับการดำเนินการ 2 การดำเนินการบนเซตนั้น ซึ่งเซตนั้นกับแต่ละการดำเนินการเป็นกลุ่มสลับที่

บทนิยาม 3 : กำหนดให้ F เป็นเซต o และ # เป็นการดำเนินการบน F ที่ทำให้ <F; #> และ <F; o > เป็นกลุ่มสลับที่และ <F; #, o > เป็นวง แล้วเราจะเรียกโครงสร้างพีชคณิต <F; #, o > ว่า *ฟิลด์ (field)*

เราจะเรียกสมาชิกเอกลักษณ์ของกลุ่ม $<F; \#>$ และกลุ่ม $<F; o>$ ซึ่ง $<F; \#, o>$ เป็นฟิลด์ ว่า *ศูนย์* และ *หน่วย* โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย 0 และ 1 ตามลำดับ เพราะฉะนั้น โครงสร้างพีชคณิตที่เป็นฟิลด์ จึงอาจเขียนเป็นสัญลักษณ์ $<F; \#, o, 0, 1>$ และสำหรับสมาชิกผกผันของแต่ละ $x \in F$ ภายใต้การดำเนินการ # และ o จึงนิยมแทนด้วยสัญลักษณ์ $-x$ และ x^{-1} ตามลำดับ

บทนิยาม 4 : เราจะเรียกฟิลด์ $<F; \#, o, 0, 1>$ ว่า *ฟิลด์ที่เป็นอันดับ (ordered field)* ถ้ามีสับเซต P ของ F ที่ซึ่ง ถ้า $x \in F$ และ $x \neq 0$ แล้ว $x \in P$ หรือ $-x \in P$ อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 5 : สมาชิกของเซต P ของบทนิยาม 4 ถูกเรียกว่า *จำนวนบวก (positive element)* ของ F ส่วนสมาชิกตัวอื่นๆนอกเหนือจากนี้และยกเว้นศูนย์ ถูกเรียกว่า *จำนวนลบ (negative element)*

บทนิยาม 6 : กำหนดให้ x และ y เป็นสมาชิกของฟิลด์ $<F; \#, o, 0, 1>$ เราจะกล่าวว่า *x ใหญ่กว่า y* และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$x > y$" (หรืออ่านว่า *y น้อยกว่า x*) ถ้า $x\#(-y) \in P$

ตัวอย่างของฟิลด์ที่เป็นอันดับที่รู้จักกันแพร่หลายคือ ฟิลด์ของจำนวนจริงกับการบวกและการคูณ

ฟิลด์ที่เล็กสุดจะต้องประกอบด้วยสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัวคือ 0 และ 1 กับการดำเนินการที่กำหนดบนเซต {0, 1} ดังในตารางข้างล่างนี้

#	0	1
0	0	1
1	1	0

o	0	1
0	0	0
1	0	1

ทฤษฎีบท 5 : กำหนดให้ $<F; \#, o, 0, 1>$ เป็นฟิลด์ แล้วสำหรับแต่ละ $x \in F$ เราจะได้ $xo\,0 = 0$

พิสูจน์ : ให้ $x \in F$ แล้ว

$xo0 = xo\,(0\#0)$ (โดย G3.)

$= (xo0)\#(xo0)$ (โดยบทนิยาม 3 และคุณสมบัติการกระจาย)

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $xo0 = 0$ //

ทฤษฎีบท 6 : กำหนดให้ $<F; \#, o, 0, 1>$ เป็นฟิลด์ x และ y เป็นสมาชิกของ F แล้ว

1. $xo(-y) = -(xoy)$
2. $(-x)o(-y) = xoy$
3. ถ้า $aob = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$
4. ถ้า $b \neq 0$ และ $aob = 0$ แล้ว $a = 0$

ทฤษฎีบท 7 : กำหนดให้ $<F; \#, o, 0, 1, <>$ เป็นฟิลด์ที่เป็นอันดับ และ $x, y \in F$ แล้ว $x<y$ หรือ $x=y$ หรือ $x>y$ เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 8 : กำหนดให้ $<F; \#, o, 0, 1, <>$ เป็นฟิลด์ที่เป็นอันดับ a, b, c และ d เป็นสมาชิกของ F แล้ว

1. ถ้า $a<b$ และ $b<c$ แล้ว $a<c$
2. ถ้า $a<b$ แล้ว $a\#c < b\#c$
3. ถ้า $a<b$ และ $c>0$ แล้ว $aoc < boc$
4. ถ้า $a<b$ และ $c<d$ แล้ว $a\#c < b\#d$

แบบฝึกหัด 12

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทของฟิลด์
2. กำหนดให้ T = {0, 1, 2}

   2.1 จงนิยามการดำเนินการ # บน T เพื่อให้ <T; #> เป็นกลุ่มสลับที่

   2.2 จงนิยามการดำเนินการ o อีกการดำเนินการหนึ่ง เพื่อให้ <T; #, o> เป็นฟิลด์
3. กำหนดให้ S = {0, 1, 2, 3, 4} และการดำเนินการ + และ . นิยามบน S ดังในตารางข้างล่างนี้

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

จงพิจารณาว่า <S; +, . > เป็นฟิลด์หรือไม่

4 . 4 บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับระบบจำนวน

4 . 4 . 1 ทฤษฎีบทพื้นฐานของเลขคณิต

ดังที่กล่าวแล้วว่าคณิตศาสตร์ไม่ว่าแขนงวิชาใดก็ตามอยู่บนรากฐานของระบบทฤษฎีเซต และทฤษฎีจำนวน และในระบบทฤษฎีเซตเองก็ได้มีการสร้างระบบจำนวนในรูปของเซต [14] เพื่อแสดงว่าทุกแขนงวิชาทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของทฤษฎีเซต และดังนั้นจึงถือได้ว่าการศึกษาคณิตศาสตร์เป็นการศึกษาในรูประบบสัจพจน์แล้ว สำหรับในหัวข้อนี้จะไม่ขอกล่าวถึงการสร้างจำนวนแต่ละจำนวน หรือแสดงเซตของจำนวนในรูปของเซตดังกล่าว แต่จะขอกำหนดคุณสมบัติบางประการของจำนวนเต็มในรูปสัจพจน์เพื่อให้นักศึกษาได้มีโอกาสเห็นตัวอย่างและฝึกฝนวิธีการพิสูจน์ในเนื้อหาของคณิตศาสตร์อีกลักษณะหนึ่ง

ทฤษฎีจำนวนเป็นการศึกษาคุณสมบัติทางพีชคณิตที่เกี่ยวกับการดำเนินการ "การบวก +" "การคูณ . " และ "การเป็นอันดับ ≤ " ของจำนวนเต็ม โดยเฉพาะอย่างยิ่งของจำนวนเต็มบวก ในที่นี้เราจะเริ่มต้นด้วยการกำหนดสัจพจน์ให้กับจำนวนเต็มบวก ในอีกลักษณะหนึ่งเสียก่อนดังต่อไปนี้

กำหนดให้ **Z** เป็นเซตของจำนวนเต็มที่มีลักษณะเป็น *เซตเต็มหน่วย (discrete set)* ของสมาชิกจำนวนนับไม่ถ้วน

. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .

ให้ + และ . เป็นการดำเนินการที่เรียกว่า "การบวก" และ "การคูณ" ตามลำดับ ส่วน "<" หรือ "≤ " เป็นอันดับบน **Z** ที่จะเรียกว่า "น้อยกว่า" หรือ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" ตามลำดับ สอดคล้องสัจพจน์ต่อไปนี้

A1: การบวก + และการคูณ . สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่ การสลับที่ และการคูณ . กระจายเหนือการบวก +

A2: 0 และ 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของการบวก + และการคูณ . ตามลำดับ

A3: แต่ละจำนวนเต็ม a จะมีตัวผกผัน -a เพียงตัวเดียวภายใต้การบวก

A4: มีสับเซต **N** ของ **Z** ที่จะเรียกว่า "เซตของจำนวนเต็มบวก" ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกเริ่มต้น (หรือสมาชิกตัวน้อยสุด) 1 นั่นคือ

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ หรือ

$\mathbf{N} = \{a \in \mathbf{Z} \mid a > 0\}$

A5: สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $a \neq 0$ เราจะได้ว่า $a \in \mathbf{N}$ หรือ $-a \in \mathbf{N}$ เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

A6: ถ้า $a<b$ แล้ว $a+1 \leq b$

A7: ถ้า $b>a>0$ แล้วจะมี $x>0$ ที่ทำให้ $b - ax > 0$

A8: ทุกๆสับเซตของ $\mathbf{N}$ ที่ไม่ใช่เซตว่างจะมีสมาชิกเริ่มต้น (หรือนั่นคือมีสมาชิกตัวน้อยสุด)

A9: ถ้า $0 \leq r < a$ และ $0 \leq s < a$ แล้ว $r - s < a$

A10: ถ้า $a>0$ และ $g>1$ แล้วจะมี $n \geq 0$ ที่ทำให้ $g^n \leq a < g^{n+1}$

[โดยที่ g^n หมายถึงผลคูณ $g.g \ldots g$ (n ครั้ง)]

ตัวอย่างสำหรับ A10 เช่น

$2^0 \leq 1 \leq 2^1$, $2^2 < 5 < 2^3$

$10^0 \leq 5 \leq 10^1$, $10^1 \leq 65 \leq 10^2$

เป็นต้น

บทนิยาม 1 : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม เราจะกล่าวว่า a *หาร (divides)* b หรือ a เป็น *ตัวหาร(divisor)* หรือ *ตัวประกอบ (factor)* ของ b และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$a|b$

ถ้า $a \neq 0$ และมีจำนวนเต็ม q ที่ทำให้ $b = aq$ และจะใช้สัญลักษณ์ $a \nmid b$ ถ้า a ไม่เป็นตัวหารของ b

ตัวอย่างเช่น $3|6$, $4 \nmid 5$ และถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $1|a$; $a|0$ $(a \neq 0)$; $a|a$ และ $a|-a$ $(a \neq 0)$

ข้อสังเกต : ขอให้สังเกตว่า ถ้า $a|b$ หมายถึง a เป็นตัวหารของ b หรือ a เป็นตัวประกอบของ b และใช้สัญลักษณ์เป็นเส้นตรงแนวดิ่ง ในขณะที่สัญลักษณ์ a / b หรือ $\frac{a}{b}$ จะมีความหมายเหมือนกันคือหมายถึงเศษส่วนที่มี a เป็นตัวเศษและ b เป็นตัวส่วน และ b

อาจเป็นตัวหารของ a หรือไม่ก็ได้

ทฤษฎีบท 1 : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $a|b$ แล้ว

$a|-b$, $-a|b$, $-a|-b$ และ $|a| \,\big|\, |b|$

ทฤษฎีบท 2 : กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

1. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$
2. ถ้า $ac|bc$ แล้ว $a|b$
3. ถ้า $a|b$ และ $c \neq 0$ แล้ว $ac|bc$
4. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(b+c)$ และ $a|[b+(-c)]$

ทฤษฎีบท 3 : กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

1. ถ้า $a|b$ แล้ว $a|bx$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม x
2. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx + cy)$ สำหรับทุกๆจำนวนเต็ม x และ y

ทฤษฎีบท 4 : (ขั้นตอนการหาร : Division Algorithm)

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b>a>0$ แล้ว จะมีจำนวนเต็ม q และ r อย่างละเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้

$b = aq + r$ และ $0 \leq r < a$

พิสูจน์ : (1) จะพิสูจน์ว่ามี q และ r ดังกล่าว

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b>a>0$ แล้วโดย A7. จะมี $x>0$ ที่ทำให้ $b - ax > 0$ ดังนั้นเซต

$T = \{x \in \mathbf{N} \mid b - ax > 0\} \neq \phi$

ให้ $S = \{b - ax \mid x \in T\}$ แล้ว $\phi \neq S \subseteq \mathbf{N}$ ซึ่งโดย A8. เราสามารถสรุปได้ว่า S มีสมาชิกตัวน้อยสุด สมมติให้ชื่อว่า r ต่อไปให้ q เป็นสมาชิกใน T ที่ซึ่ง $r = b - aq$ เพราะฉะนั้น

$b = aq + (b - aq) = aq + r$

เนื่องจาก r เป็นสมาชิกตัวน้อยสุดของ S และ

$b - (q + 1)a < b - aq = r$

จึงได้ว่า $b - (q + 1)a \notin S$ หรือนั่นคือ $b - (q + 1)a < 0$ ซึ่งทำให้ได้

$r - a = (b - aq) - a = b - (q + 1)a < 0$

หรือ $0 \le r < a$ ตามต้องการ

(2) จะแสดงว่า q และ r ใน (1) มีได้อย่างละเพียงจำนวนเดียว โดยการสมมติในทางตรงข้ามว่า มีคู่ของ q และ r ดังกล่าวได้มากกว่า 1 คู่

สมมติให้ $q_1 \neq q_2$ แต่ $b = q_1 a + r_1$ และ $b = q_2 a + r_2$ เมื่อ $0 \le r_1 < a$ และ $0 \le r_2 < a$ แล้วโดย A5. เราอาจสมมติว่า $q_1 - q_2 \in \mathbf{N}$ หรือนั่นคือ $q_1 - q_2 > 0$ ซึ่งโดย A6. จะได้

$1 \le q_1 - q_2$

และได้ว่า

$a \le (q_1 - q_2)a = r_1 - r_2 < a$ (โดย A9.)

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $q_1 = q_2$ ซึ่งทำให้

$r_1 = b - q_1 a = b - q_2 a = r_2$

ด้วย //

ข้อแนะนำเกี่ยวกับการพิสูจน์ : การพิสูจน์ข้อความหรือทฤษฎีบทที่กล่าวว่า *"มีอยู่เพียงหนึ่งเดียว"* จะต้องพิสูจน์ 2 ขั้นตอนต่อไปนี้เสมอคือ

1. พิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่ง

และ 2. พิสูจน์ให้ได้ว่า ถ้ามีแล้วจะมีได้อย่างมากเพียงหนึ่งเดียว

หมายเหตุ : เราเรียก q และ r ของทฤษฎีบท 4 ว่า *ผลหาร (quotient)* และ *เศษเหลือ (remainder)* ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 5 : กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ $g>1$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n เพียงจำนวนเดียว และชุดของจำนวนเต็ม $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เพียงชุดเดียวเท่านั้น ที่ทำให้

$$a = c_0 g^1 + c_1 g^1 + c_2 g^3 + \ldots + c_n g^n = \sum_{i=0}^{n} c_i g^i$$

โดยที่ $0 \le c_i < g$ สำหรับทุกๆ i

พิสูจน์ : (1) จะแสดงว่ามี n และ $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ดังกล่าวโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ถ้า $a = 1$ เราให้ $n = 0$ และ $c_0 = 1$ แล้วจะได้ $1 = 1.g^0$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท เราจึงสมมติให้ทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า a ดังนั้นโดย A10. จะมี $n \ge 0$ ที่ทำให้

$$g^n \le a \le g^{n+1}$$

และโดยทฤษฎีบท 4 จะมี c และ r ที่ทำให้

$$a = cg^n + r$$

โดยที่ $0 \le r < a$ ถ้า $r = 0$ เราจะได้ $a = cg^n = \sum_{i=0}^{n} c_i g^i$ (โดยให้ $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$ และ $c_n = c$) แต่ถ้า $0 < r < a$ แล้วโดยสมมติฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะมีจำนวนเต็มบวก $m, c_1, c_2, \ldots, c_m$ ที่ทำให้

$$r = \sum_{i=0}^{m} c_i g^i$$

โดยที่ $0 \le c_i < g^i$ สำหรับทุกๆ $i = 0, 1, 2, \ldots, m$

ให้ $c_n = c$ (และ $c_{m+1} = c_{m+2} = \ldots c_{n-1} = 0$ ถ้า $m < n-1$) แล้วเราจะได้

$$a = \sum_{i=0}^{n} c_i g^i$$

โดยที่ $0 \le c_i < g^i$ สำหรับทุกๆ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ ตามต้องการ

[**หมายเหตุ** : ขอให้สังเกตสมมติฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในที่นี้ด้วย]

(2) จะแสดงว่า n และ c_i มีได้ย่างมากเพียงชุดเดียว โดยสมมติว่า

$$a = \sum_{i=0}^{n} c_i g^i = \sum_{i=0}^{m} b_i g^i$$

ถ้ามี i ซึ่ง $c_i \neq b_i$ หรือ $n \neq m$ แล้วจะได้ว่า $g = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดว่า $g > 1 > 0$ เพราะฉะนั้น $c_i = b_i$ สำหรับทุกๆ i และดังนั้น $m = n$ //

หมายเหตุ : เราเรียกการกระจายจำนวนเต็มบวก a ในรูปของทฤษฎีบท 5 ว่า การกระจายในระบบฐาน g ตัวอย่างเช่น

$$2345 = 5 + 4(10) + 3(10)^2 + 2(10)^3$$

หรือ

$$866 = 5 + 4(7) + 3(7) + 2(7)^3$$
$$= 2345_7$$

หรือ

$$50 = 0 + 1(2) + 0(2)^2 + 0(2)^3 + 1(2)^4 + 1(2)^5$$
$$= 110010_2$$

เป็นต้น

บทนิยาม 2 : กำหนดให้ a, b และ m เป็นจำนวนเต็ม เราจะกล่าวว่า m เป็น*ตัวคูณร่วม (common multiple)* ของ a และ b ถ้า $a|m$ และ $b|m$

บทนิยาม 3 : กำหนดให้ a, b และ m เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะกล่าวว่า m เป็น*ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น. : least common multiple)* ของ a และ b และเขียนแทน m นี้ด้วยสัญลักษณ์ "[a, b]" ถ้า

1. m เป็นตัวคูณร่วมของ a และ b

และ 2. ถ้า n เป็นตัวคูณร่วมของ a และ b แล้ว $m|n$

บทนิยาม 4 : กำหนดให้ a, b และ d เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะกล่าวว่า d เป็น *ตัวหารร่วม (common divisor)* ของ a และ b ถ้า $d|a$ และ $d|b$

บทนิยาม 5 : กำหนดให้ a, b และ d เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะกล่าวว่า d เป็น *ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม. : greatest common divisor)* ของ a และ b และจะเขียนแทน d นี้ด้วยสัญลักษณ์ "(a, b)" ถ้า

1. d เป็นตัวหารร่วมของ a และ b

และ 2. ถ้า g เป็นตัวหารร่วมของ a และ b แล้ว $g|d$

ทฤษฎีบท 6 : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก และ $d = (a, b)$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม s และ t ที่ซึ่ง $d = as + bt$

พิสูจน์ : กำหนดให้

$$S = \{ax+by \mid ax+by > 0\}$$

แล้วเนื่องจาก $a>0$ และ $b>0$ จะได้ว่า $(ab + b0) > 0$ ดังนั้น $S \neq \phi$ ซึ่งโดย A8. เราจะได้ว่า S มีสมาชิกตัวน้อยสุด นั่นคือมีจำนวนเต็ม s และ t ที่ซึ่ง $d = as + bt$ เป็นสมาชิกตัวน้อยสุดของ S

ต่อไปจะแสดงว่า d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b เนื่องจาก $a>d>0$ $(a = a.1+b.0 \in S)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4 จะมีจำนวนเต็ม q และ r ที่ทำให้ $a = dq + r$ หรือ $r = a - dq$ โดยที่ $0 \leq r < d$ และเมื่อแทนค่า $d = as + bt$ จะได้

$$r = a - (as+bt)q = a(1 - sq) + b(-tq) \geq 0$$

ถ้า $r>0$ จะได้ $r \in S$ และ $r<d$ ซึ่งค้านกับการเป็นสมาชิกตัวน้อยสุดของ d ดังนั้น $r=0$ หรือนั่นคือ

$$a = dq \quad \text{หรือ} \quad d|a$$

และด้วยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกันของ b และ d จะได้ว่า $d|b$ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3(2) จะได้ว่า ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|d$ หรือนั่นคือ $d = (a, b)$ //

หมายเหตุ : ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จากขั้นตอนการหาร จะมีจำนวนเต็ม q_1 และ r_1 ซึ่ง

$$a = bq_1 + r_1 \quad ; 0 \le r_1 < b \qquad (1)$$

ถ้า $r_1 = 0$ จะได้ว่า $b|a$ และ b เป็นตัวหารร่วมของ a และ b และดังนั้นจึงเป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b

ถ้า $r_1 > 0$ จากขั้นตอนการหาร จะมีจำนวนเต็ม q_2 และ r_2 ซึ่ง

$$b = r_1 q_2 + r_2 \quad ; 0 \le r_2 < r_1 \qquad (2)$$

ถ้า $r_2 = 0$ วิธีการจะสิ้นสุดเพียงแค่นี้ แต่ถ้า $r_2 > 0$ โดยใช้ขั้นตอนการหารกระทำต่อไปเรื่อยๆ จะได้ว่า

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad ; 0 \le r_3 < r_2 \qquad (3)$$

$$r_2 = r_3 q_4 + r_4 \quad ; 0 \le r_4 < r_3 \qquad (4)$$

.

.

.

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k \quad ; 0 \le r_k < r_{k-1} \qquad (k)$$

โดยที่ $r_i \ne 0$ เมื่อ $i \le k$

เนื่องจาก $r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \ldots r_{k-1} > r_k > 0$ จะเห็นว่า r_i มีค่าน้อยลงเรื่อยๆ เมื่อ i มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นจะต้องมี i ซึ่ง $r_i = 0$ สมมติให้ $r_{k+1} = 0$ เพราะฉะนั้น

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} \qquad (k+1)$$

ซึ่งทำให้วิธีการสิ้นสุดลง และทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า $(a, b) = r_k$

ทฤษฎีบท 7 : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่ โดยการใช้ขั้นตอนของหมายเหตุข้างต้นหา r_k โดยที่ $r_{k+1} = 0$ จะได้ว่า $r_k = (a, b)$

พิสูจน์ : (1) จะแสดงว่า r_k เป็นตัวหารร่วมของ a และ b โดยพิจารณาตามวิธีการของหมายเหตุข้างต้น จากขั้นที่ (k+1) ซึ่งมี $r_{k-1} = r_k q_{k+1}$ จะได้ว่า $r_k | r_{k-1}$ และจากขั้นที่ (k) ซึ่ง $r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$ ก็จะได้ $r_k | r_{k-2}$ และเมื่อพิจารณาย้อนกลับขึ้นไปเช่นนี้เรื่อยๆจนถึงขั้นที่ (2) ซึ่งจะได้จากขั้นที่ (3) ว่า $r_k | r_1$ และ $r_k | r_2$ ดังนั้น $r_k | b$ แต่ $r_k | b$ และ $r_k | r_1$ ดังนั้นจึงสรุปในขั้นที่ (1) ว่า $r_k | a$ นั่นคือ $r_k | a$ และ $r_k | b$ ซึ่งแสดงว่า r_k เป็นตัวหารร่วมของ a และ b

(2) สมมติให้ c เป็นตัวหารร่วมของ a และ b พิจารณาจากขั้นที่ (1) จะได้ว่า $c | r_1$ และพิจารณาต่อในขั้นที่ (2) ก็จะได้ว่า $c | r_2$ และเมื่อพิจารณาต่อไปเรื่อยๆจนถึงขั้นที่ (k) ก็จะได้ว่า $c | r_k$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า r_k เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b //

ตัวอย่างเช่น เราจะหาตัวหารร่วมมากของ 1001 และ 357 เราจะทำตามขั้นตอนของหมายเหตุ ได้ดังนี้

$$1001 = 357(2) + 287$$

$$357 = 287(1) + 70$$

$$287 = 70(4) + 7$$

$$70 = 7(10)$$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า (1001, 357) = 7 และหากเราต้องการหา s และ t ที่ทำให้ $7 = 1001s + 357t$ จะกระทำการย้อนกลับดังนี้

$$\begin{aligned} 7 &= 287 - 70(4) \\ &= 287 - [357 - 287(1)](4) \\ &= 287(5) - 357(4) \\ &= 1001(5) + 357(-14) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $s = 5$ และ $t = -14$

สังเกตว่า s และ t ของแต่ละคู่ a และ b ไม่ได้มีเพียงคู่เดียว เช่นอาจเขียน 7

ได้อีกรูปหนึ่งคือ $7 = 1001(56) + 357(-157)$ เป็นต้น

บทนิยาม 6 : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะกล่าวว่า a และ b เป็น *จำนวนเฉพาะต่อกัน (relatively prime)* ถ้า $(a, b) = 1$

ตัวอย่างเช่น 5 กับ 4 หรือ 7 กับ 9 ต่างก็เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน เพราะ $(5, 4) = 1$ และ $(7, 9) = 1$ แต่ 2 กับ 4 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน เพราะ $(2, 4) = 2$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 8 : กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ซึ่ง $(a, b) = 1$ จะได้ว่า

1. มีจำนวนเต็มบวก s และ t ซึ่ง $1 = as + bt$
2. ถ้า $b>0$ และ $b|ac$ แล้ว $b|c$
3. ถ้า $a|c$ และ $b|c$ แล้ว $ab|c$

ทฤษฎีบท 9 : กำหนดให้ a, b และ d เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $(a, b) = d$ แล้ว $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

ทฤษฎีบท 10 : กำหนดให้ a และ t เป็นจำนวนเต็มบวก $m = [a, b]$ และ $d = (a, b)$ แล้ว $ab = md$

แบบฝึกหัด 13

1. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้
   1.1 ถ้า $a|b$ และ $a|c$ และ $b>c$ แล้ว $a|(b - c)$
   1.2 ถ้า $a|b$ หรือ $a|c$ แล้ว $a|bc$
   1.3 ถ้า $a|bc$ แล้ว $a|b$ หรือ $a|c$
   1.4 ถ้า $a \nmid b$ และ $a \nmid c$ แล้ว $a \nmid (b+c)$

2. กำหนดให้ a, b และ m เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a, m)=(b, m)=1$ จงแสดงว่า $(ab, m) = 1$

3. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a \neq 0$ และ $c \neq 0$ ถ้า $(a, c) = d$, $a|b$ และ $c|b$ จงแสดงว่า $ac|bd$

4. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $(a, b) = 1$ จงแสดงว่า

$(a+b, a - b) = 1$ หรือ $(a+b, a - b) = 2$

5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

$(a, b) = [a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

บทนิยาม 7 : กำหนดให้ p เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 เราจะกล่าวว่า p เป็น *จำนวนเฉพาะ (prime number)* ถ้า $a|p$ แล้ว $a=1$ หรือ $a=p$

และเราจะเรียกจำนวนเต็ม $n \neq 0$ ว่า *จำนวนประกอบ(composite numbers)* ถ้า $n \neq \pm 1$ และ n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่างของจำนวนเฉพาะได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, . . . เป็นต้น และตัวอย่างของจำนวนประกอบได้แก่ $\pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9$. . . เป็นต้น แต่สำหรับ 0 และ ± 1 ไม่เป็นทั้งจำนวนเฉพาะและจำนวนประกอบ

ทฤษฎีบท 11 : กำหนดให้ p เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p>1$ แล้ว p เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่ากรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริงคือ $(p, n) = 1$ หรือ $p|n$

พิสูจน์ : กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $(p, n) = 1$ จะได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง จึงจะพิจารณากรณีที่ $(p, n) \neq 1$ โดยสมมติให้ d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $d = (p, n)$ ดังนั้น $d \neq 1$ และ $d|p$ แต่ p เป็นจำนวนเฉพาะจึงได้ว่า $d = p$ และเนื่องจาก $d|n$ เพราะฉะนั้น $p|n$

ในการพิสูจน์บทกลับ สมมติว่าสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะมีกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริงคือ $(p, n) = 1$ หรือ $p|n$ และเพื่อจะแสดงว่า p ต้องเป็นจำนวนเฉพาะ จะ

สมมติให้ d เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $d|p$ โดยที่ $d \neq \pm 1$ เพราะฉะนั้น $(d, p) \neq 1$ ซึ่งโดยสมมติฐานจะได้ว่า $p|d$ แต่จาก $p|d$ และ $d|p$ ทำให้ได้ $d = p$ และนั่นคือ p เป็นจำนวนเฉพาะ //

ทฤษฎีบทพื้นฐานที่สำคัญเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะคือ ทฤษฎีบทที่แสดงว่าทุกจำนวนเต็มซึ่งมากกว่า 1 สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะเช่น $15 = 3.5$, $6 = 2.3$, $16 = 2^4$ และ $17 = 17.1$ เป็นต้น แต่ก่อนที่จะศึกษาถึงทฤษฎีบทดังกล่าว จะพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้เพื่อนำผลไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานดังกล่าว

ทฤษฎีบท 12 : กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a|bc$ และ $(a, b) = 1$ แล้ว $a|c$

พิสูจน์ : เนื่องจาก $(a, b) = 1$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8 ข้อ 1 จะมีจำนวนเต็มบวก s และ t ที่ซึ่ง $1 = as + bt$ และดังนั้น $c = asc + bct$ ซึ่งโดยข้อสมมติว่า $a|bc$ และโดยความเป็นจริงว่า $a|asc$ ทำให้สรุปโดยใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 4 ได้ว่า $a|c$ //

ทฤษฎีบท 13 : กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $p|a_1a_2 \ldots a_n$ แล้วจะมี a_i, $1 \leq i \leq n$ ซึ่ง $p|a_i$

พิสูจน์ : จะพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าทฤษฎีบทเป็นจริงเมื่อ $n = 1$ จึงจะสมมติให้ทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับ $n - 1$ ซึ่ง $n>1$ นั่นคือถ้า $p|a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ แล้วจะมี $i(1 \leq i \leq n-1)$ ซึ่ง $p|a_i$

พิจารณา $a_1a_2 \ldots a_n$ โดยสมมติว่า $p|a_1a_2 \ldots a_n$ และ $p \nmid a_i$ สำหรับทุก iซึ่ง $1 \leq i < n$ ดังนั้นโดยสมมติฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $p \nmid a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ แต่เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะจึงได้ว่า $(p, a_1a_2 \ldots a_{n-1}) = 1$ ซึ่งโดยทฤษฎีบท 12 ทำให้สรุปได้ว่า $p|a_n$ //

หมายเหตุ : ขอให้สังเกตสมมติฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของทฤษฎีบท 13 นี้เปรียบเทียบกับของทฤษฎีบท 5 ข้างต้น

บทนิยาม 8 : กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะกล่าวว่า n *เขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ* ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเฉพาะ $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (r เป็นจำนวนเต็มบวก) ซึ่ง $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ และจะเรียกเซต $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ ว่า *ชุดของจำนวนเฉพาะที่มีผลคูณเป็น* n

ทฤษฎีบท 14 : (ทฤษฎีบทพื้นฐานของเลขคณิต : Fundamental Theorem of Arithmatics)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $n>1$ แล้ว n สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ และชุดของจำนวนเฉพาะที่มีผลคูณเป็น n มีได้เพียงชุดเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ : การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ แบ่งออกเป็น 2 ตอน คือ

1. การแสดงว่าทุกจำนวนเต็ม n สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ

และ 2. ชุดของจำนวนเฉพาะที่มีผลคูณเป็น n มีได้เพียงชุดเดียวเท่านั้น

(1) กำหนดให้

$S = \{m \in \mathbf{Z} \mid m>1$ และ m ไม่สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ$\}$

จะได้ว่าถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $p \notin S$

สมมติว่า $S \neq \phi$ และเนื่องจาก S เป็นสับเซตของจำนวนเต็มบวก ซึ่งโดย A8. จะได้ว่า S มีสมาชิกตัวน้อยสุด สมมติให้ชื่อว่า n ดังนั้น n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ นั่นคือจะมีจำนวนเต็ม n_1 และ n_2 ที่ซึ่ง $n = n_1 n_2$ โดยที่ $1<n_1<n$ และ $1<n_2<n$ แต่โดยคุณสมบัติการเป็นสมาชิกตัวน้อยสุดของ n ทำให้ได้ว่า $n_1 \notin S$ และ $n_2 \notin S$ ซึ่งแสดงว่า n_1 และ n_2 สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ และทำให้ n ก็สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะเช่นเดียวกัน จึงขัดแย้งกับ $n \in S$ ทำให้สรุปได้ว่า . $S = \phi$

(2) สมมติให้ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n>1$ และมีจำนวนเฉพาะ $p_1, p_2, \ldots, p_s$ และ $q_1, q_2, \ldots, q_t$ ซึ่ง $t>s$ และ $n = p_1 p_2 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_t$ แต่เนื่องจาก $p_1 | p_1 p_2 \ldots p_s$ เพราะฉะนั้น $p_1 | q_1 q_2 \ldots q_t$ และโดยทฤษฎีบท 13 จะมี q_j ซึ่ง $1 \le j \le t$ และ $p_1 | q_j$ ดังนั้น $p_1 = q_j$ เพราะว่า p_1 และ q_j ต่างก็เป็นจำนวนเฉพาะ โดยกฎการตัดออกภายใต้การคูณของจำนวนเต็มจะได้

$$p_2 p_3 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_{j-1} q_{j+1} \ldots q_t \qquad (1)$$

และด้วยวิธีการเดียวกันจะมี q_k ซึ่ง $1 \le k \le t$, $k \ne j$ และ $p_2 = q_k$ และถ้ากระทำวิธีการนี้ซ้ำไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึง p_s เราจะได้ทางซ้ายมือของ (1) เป็น 1 และทางขวามือของ (1) เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ ซึ่งเป็นไปไม่ได้นอกจาก $t = s$ เพราะฉะนั้น

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_s\} = \{q_1, q_2, \ldots, q_s\} \quad //$$

หมายเหตุ :โดยการจัดอันดับของชุดของจำนวนเฉพาะ $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ ซึ่ง $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ ซึ่งถ้ามีจำนวนเฉพาะซ้ำกัน เราอาจเขียน n ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะกำลังต่างๆได้ดังนี้

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k} \qquad (2)$$

โดยที่ $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ เป็นชุดของจำนวนเฉพาะ และ $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างเช่น $2520 = 2.3.2.5.7.3$ สามารถเขียนในรูป (2) ได้ดังนี้

$$2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$$

ผลของทฤษฎีบทพื้นฐานของเลขคณิต ทำให้กล่าวได้ว่าจำนวนเฉพาะมีได้มากมายเป็นจำนวน อนันต์

ทฤษฎีบท 15 : มีจำนวนเฉพาะเป็นจำนวนอนันต์

พิสูจน์ : สมมติว่าทฤษฎีบทไม่เป็นจริง นั่นคือมีจำนวนเฉพาะเพียงแค่จำนวนจำกัดเท่านั้น โดยสมมติว่าจำนวนเฉพาะทั้งหมดคือ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (n เป็นจำนวนเต็มบวก) พิจารณา

จำนวนเต็มบวก $a = (p_1 p_2 \cdots p_n)+1$ จะได้ว่าทุกจำนวนเฉพาะ p_i ; $i = 1, 2, \ldots, n$ ไม่เป็นตัวหารของ a เพราะถ้ามี i ซึ่ง $1 \le i \le n$ และ $p_i | a$ แล้วโดยทฤษฎีบท 2 ข้อ 4 จะได้ว่า $p_i | 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แต่เพราะว่า $a>1$ ซึ่งโดยทฤษฎีบทพื้นฐานของเลขคณิต ทำให้ได้ว่า a สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณจำกัดของจำนวนเฉพาะ และจำนวนเฉพาะที่นำมาคูณกันแล้วได้ a จะต้องมีที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ซึ่งแสดงว่าจำนวนเฉพาะไม่ได้มีเพียงแค่ที่อยู่ในเซต $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ เท่านั้น ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติ ทำให้สรุปได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง //

แม้ว่าทฤษฎีบท 15 จะบอกเราว่าจำนวนเฉพาะมีมากมาย แต่เราก็ยังไม่สามารถหาสูตรสำหรับการหาจำนวนเฉพาะตัวต่อไปจากจำนวนเฉพาะที่เรารู้จักแล้วตัวหนึ่งได้ ทั้งนี้เพราะจำนวนเฉพาะมีการกระจายกันอยู่อย่างไม่แน่นอน ดังจะเห็นว่าบางตัวอาจเป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ถัดจากจำนวนเฉพาะที่อยู่ก่อนหน้าเพียงแค่ 2 จำนวนเช่น 5 กับ 7 และ 17 กับ 19 แต่บางจำนวนก็อยู่ติดกันเช่น 2 กับ 3 หรือบางจำนวนอาจอยู่ห่างกันมากกว่า 2 จำนวน เช่น 7 กับ 11 เป็นต้น

อย่างไรก็ตามเราสามารถหาจำนวนประกอบที่เรียงติดกัน n จำนวน (n เป็นจำนวนเต็มบวก) ได้เสมอ และตัวอย่างของ n จำนวนนั้นก็คือ

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + (n+1)$$

โดยที่ $(n+1)! = (n+1)n \ldots 3.2.1$

บทนิยาม 9 : กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม เราจะกล่าวว่า n เป็น*จำนวนคู่ (even numbers)* ถ้ามีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $n = 2m$

และเราจะเรียกจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนคู่ว่า *จำนวนคี่ (odd number)*

จากบทนิยาม 9 จะเห็นว่าจำนวนคู่ทุกตัวเป็นพหุคูณของ 2 หรือมี 2 เป็นตัวหารตัวหนึ่ง ดังนั้นจำนวนคู่ที่ไม่ใช่ 2 จึงไม่เป็นจำนวนเฉพาะ หรือกล่าวได้ว่าจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 2 เป็นจำนวนคี่

แบบฝึกหัด 14

1. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $(n, n+1) = 1$
2. จงเขียนจำนวนเต็มต่อไปนี้ ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ

   2.1 7234 2.2 6432

   2.3 294 2.4 3456
3. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

   $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + (n+1)$

   ต่างเป็นจำนวนประกอบ
4. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $n = 2m+1$ จงแสดงว่า n เป็นจำนวนคี่
5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า

   5.1 ถ้า a และ b ต่างเป็นจำนวนคู่ แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคู่

   5.2 ถ้า a และ b ต่างเป็นจำนวนคี่ แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคู่

   5.3 ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคี่
6. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่ามีจำนวนเฉพาะที่เขียนได้ในรูป $4n+1$ และ $4n+3$ อยู่เป็นจำนวนอนันต์

4.4.2 คอนกรูเอนซ์

ในการกล่าวถึงจำนวนเต็มสองจำนวน โดยอาศัยขั้นตอนการหารเราสามารถกล่าวถึงผลหารและเศษเหลือ ของการหารจำนวนหนึ่งด้วยอีกจำนวนหนึ่งได้ และถ้ากำหนดตัวหารให้คงที่ เห็นได้ชัดว่าเศษเหลือจากการหารจำนวนเต็มต่างๆด้วยตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มคงที่นั้น จะเป็นจำนวนเต็มที่เรียงลำดับกันเป็นคาบ เช่นกำหนดตัวหารเป็น 3 คงที่ แล้วเศษเหลือจากการหารจำนวนเต็ม 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . จะคือ 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, . . . ตามลำดับ ดังนั้นเราอาจจำแนกจำนวนเต็มออกเป็นเซตย่อย โดยให้แต่ละเซตย่อยของจำนวนเต็มมีค่าของเศษเหลือจากการหารด้วยจำนวนคงที่เท่ากัน และจะกล่าวว่าจำนวนเต็มสองจำนวนมีความสัมพันธ์กัน ถ้าจำนวนทั้งสองหารด้วยจำนวนเต็มคงที่จำนวนหนึ่งแล้วเหลือเศษเท่ากัน

ในหัวข้อนี้จะขอกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนเต็มซึ่งกำหนดในรูปของเศษเหลือดังกล่าว

บทนิยาม 1 : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะกล่าวว่า a *คอนกรูเอนซ์ (congruence)* กับ b *มอดูโล (modulo)* m ถ้า $m|(a - b)$

จะเขียนสัญลักษณ์ "$a \equiv b \pmod{m}$" แทน "a คอนกรูเอนซ์กับ b มอดูโล m" แต่ถ้า $m \nmid (a - b)$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$a \not\equiv b \pmod{m}$" และกล่าวว่า "b ไม่คอนกรูเอนซ์กับ a มอดูโล m"

จำนวนเต็มสองจำนวนมีความสัมพันธ์คอนกรูเอนซ์มอดูโล 2 ก็ต่อเมื่อ จำนวนเต็มทั้งสองเป็นจำนวนคู่ หรือจำนวนคี่ทั้งคู่

ตัวอย่างอื่นๆได้แก่

$17 \equiv 3 \pmod{7}$ เพราะ $7|(17 - 3) = 14$;

$4 \equiv 22 \pmod{9}$ เพราะ $9|(4 - 22) = -18$;

$19 \equiv 19 \pmod{11}$ เพราะ $11|0 = 19-19$;

แต่ $17 \not\equiv 3 \pmod{8}$ เพราะ $8 \nmid 14$

เป็นต้น

ข้อสังเกต : เมื่อ $m = 0$ และ $a \equiv b \pmod{m}$ จะได้ว่า $0|(a - b)$ แต่เนื่องจาก $0 \nmid x$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ ดังนั้นการกล่าวว่า $a \equiv b \pmod{0}$ ก็เหมือนกับกล่าวว่า $a - b \neq 0$ หรือ $a \neq b$ นั่นเอง เพราะฉะนั้นต่อไปนี้จะกล่าวถึงคอนกรูเอนซ์มอดูโล m เฉพาะเมื่อ $m>0$ เท่านั้น

ทฤษฎีบท 1 : กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

1. $(\forall a \in \mathbb{Z})[a \equiv a \pmod{n}]$
2. $(\forall a, b \in \mathbb{Z})[a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}]$
3. $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})$[ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$]

พิสูจน์ : (1) ให้ $a \in \mathbf{Z}$ เนื่องจาก $a - a = 0 = 0.n$ ดังนั้น n เป็นตัวประกอบของ $a - a$ หรือนั่นคือ $a \equiv a \pmod{n}$

(2) ให้ $a, b \in \mathbf{Z}$ โดยที่ $a \equiv b \pmod{n}$ ดังนั้น $n|(a - b)$ ซึ่งทำให้ได้โดยทฤษฎีบท 1 ว่า $n|-(a - b)$ หรือ $n|(b - a)$ เพราะฉะนั้น $b \equiv a \pmod{n}$

(3)ให้ $a, b, c \in \mathbf{Z}$ โดยที่ $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ ดังนั้น $n|(a - b)$ และ $n|(b - c)$ ซึ่งโดยทฤษฎีบท 2(4) จะได้ $n|[(a - b) + (b - c)]$ แต่ $(a - b) + (b - c) = a - c$ จึงทำให้ได้ว่า $n|(a - c)$ นั่นคือ $a \equiv c \pmod{n}$ //

ทฤษฎีบท 2 : กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว

1. $a+c \equiv b+d \pmod{m}$
2. $ac \equiv bd \pmod{m}$
3. $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ : เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ จะได้ว่า $m|(a - b)$ และ $m|(c - d)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2 ข้อ 4 จะได้

(1) $m|[(a - b + (c - d)]$ ซึ่งก็คือ $m|[(a+c) - (b+d)]$ เพราะฉะนั้น $a+c \equiv b+c \pmod{m}$

(2) $m|[c(a - b) + b(c - d)]$ ซึ่งก็คือ $m|(ac - bd)$ เพราะฉะนั้น $ac \equiv bd \pmod{m}$

สำหรับการพิสูจน์ (3) จะใช้การอ้างอิงทฤษฎีบท 2 ข้อ 2 และการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ //

จากทฤษฎีบท 2 สังเกตได้ว่าความสัมพันธ์คอนกรูเอนซ์มอดูโล m มีคุณสมบัติทางพีชคณิตคล้ายกับความสัมพันธ์ "เท่ากับ" ในเซตของจำนวนเต็ม ยกเว้นกฎการตัดออกสำหรับการคูณ เช่นเมื่อ $a=2, b=6$ และ $c=3$ จะได้ $ac \equiv bc \pmod{6}$ แต่ $a \not\equiv b \pmod{6}$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3 และบทแทรก 4 ต่อไปนี้ จะแสดงคุณสมบัติที่สำคัญที่ทำให้กฎการตัดออกเป็นจริงสำหรับความสัมพันธ์คอนกรูเอนซ์มอดูโล m ด้วย

ทฤษฎีบท 3 : กำหนดให้ m, m_1 และ d เป็นจำนวนเต็มบวก a, b และ c เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $ac \equiv bc \pmod{m}$, $c \not\equiv 0 \pmod{m}$, $d = (c, m)$ และ $m_1 d = m$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m_1}$

พิสูจน์ : เนื่องจาก $ac \equiv bc \pmod{m}$ เพราะฉะนั้น $m \mid (ac - bc)$ นั่นคือมี $k \in \mathbf{Z}$ ซึ่ง $ac - bc = km$ และเนื่องจาก $d = (c, m)$ ดังนั้น $d \mid c$ และ $d \mid m$ นั่นคือมี $c_1, m_1 \in \mathbf{Z}$ ซึ่ง $c = c_1 d$ และ $m = m_1 d$ ตามลำดับและโดยการแทนค่าใน $ac - bc = km$ จะได้ $a(c_1 d) - b(c_1 d) = k(m_1 d)$ และได้ $c_1(a - b) = km_1$ แต่เพราะว่า $c \not\equiv 0 \pmod{m}$ จึงทำให้ $c \neq 0$ และดังนั้น $d \neq 0$ ด้วย

จาก $c_1(a - b) = km_1$ เพราะฉะนั้น $m_1 \mid c_1(a-b)$ แต่จากทฤษฎีบท 9 หัวข้อ 4.4.1 แสดงว่า $(m_1, c_1) = 1$ ซึ่งโดยทฤษฎีบท 12 หัวข้อ 4.4.1 ทำให้สรุปได้ว่า $m_1 \mid (a - b)$ หรือ $a \equiv b \pmod{m_1}$ //

บทแทรก 4 : ถ้า $ac \equiv bc \pmod{m}$ และ $(c, m) = 1$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

สำหรับบทแทรกนี้เป็นผลจากทฤษฎีบท 3 ข้างต้นเมื่อ $d = 1$

บทนิยาม 2 : ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะใช้สัญลักษณ์ $\mathbf{Z}_n$ แทนเซต $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

ตัวอย่างเช่น $\mathbf{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $\mathbf{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ เป็นต้น และขอให้สังเกตว่า $\mathbf{Z}_n$ จะมีสมาชิกเพียง n ตัวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 5 : กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ a เป็นจำนวนเต็ม แล้วจะมี $b \in \mathbf{Z}_n$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $a \equiv b \pmod{n}$

พิสูจน์ : การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้มี 2 ขั้นตอน คือ

1. แสดงให้เห็นว่า มีจำนวนเต็ม $b \in \mathbf{Z}_n$ ซึ่ง $a \equiv b \pmod{n}$

และ 2. แสดงว่าถ้า b_1 และ b_2 ต่างเป็นสมาชิกของ $\mathbf{Z}_n$ ซึ่ง $a \equiv b_1 \pmod{n}$ และ $a \equiv b_2 \pmod{n}$ แล้ว $b_1 = b_2$

(1) เนื่องจาก $a = nr+q$ โดยที่ $q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (โดยขั้นตอนการหาร จำนวนเต็ม a หารด้วย n จะเหลือเศษ $0, 1, \ldots, n-1$ ตัวใดตัวหนึ่ง) ให้ $b=q$ เราจะได้ $a - b = nr$ หรือ n เป็นตัวประกอบของ $a - b$ นั่นคือ $a \equiv b \pmod{n}$ โดยที่ $b \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

(2) สมมติ $b_1 < b_2$ เนื่องจาก $0 \le b_1 \le n-1$ และ $b_2 \ge 0$ ดังนั้น $0 < b_1 - b_2 \le n-1-b_2 < n-1$ ซึ่งแสดงว่า n ไม่อาจเป็นตัวประกอบของ $b_1 - b_2$ นั่นคือ b_1 ไม่คอนกรูเอนซ์กับ b_2 มอดูโล n หรืออีกนัยหนึ่งกล่าวว่า ถ้า $b_1 \equiv b_2 \pmod{n}$ โดยที่ $b_1, b_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ แล้ว $b_1 = b_2$ //

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $n=6$

1. ถ้า $a = 25$ แล้ว $25 = 4(6)+1$ นั่นคือ $25 \equiv 1 \pmod{6}$ โดยที่ $1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. ถ้า $a = -14$ แล้ว $-14 = (-3)6+4$ นั่นคือ $-14 \equiv 4 \pmod{6}$ โดยที่ $4 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

บทแทรก 6 : กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก r ที่น้อยสุด ซึ่ง $a \equiv r \pmod{m}$ และ $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

ข้อสังเกต : บทแทรก 6 ข้างต้นกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า จำนวนเต็ม a คอนกรูเอนซ์มอดูโล m กับเศษเหลือจากการหาร a ด้วย m ซึ่งเราสามารถนำหลักนี้ไปใช้ในการหาเศษที่เกิดจากการหารด้วยจำนวนเต็มบวก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 : จงหาเศษที่ได้จากการหาร $(19)^3(288)^2$ ด้วย 5

วิธีทำ : เนื่องจาก $19 \equiv 4 \pmod 5$ จากทฤษฎีบท 2 ข้อ 3 ข้างต้นจะได้ $19^3 \equiv 4^3 \pmod 5$ แต่ $4^3 - 4 = 4(4^2 - 1) = 4.15$ ดังนั้น $4^3 \equiv 4 \pmod 5$ ซึ่งโดยทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 จะได้ $(19)^3 \equiv 4 \pmod 5$ และเช่นเดียวกันเนื่องจาก $288 \equiv 3 \pmod 5$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2 ข้อ 3 อีกครั้ง จะได้ $(288)^2 \equiv 3^2 \pmod 5$ แต่ $3^2 - 4 = 5$ ดังนั้น $3^2 \equiv 4 \pmod 5$ โดยทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 อีกครั้งทำให้ได้ $(288)^2 \equiv 4 \pmod 5$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2 ข้อ 2 จะได้ว่า $(19)^3(288)^2 \equiv 4.4 \pmod 5$ แต่ $16 \equiv 1 \pmod 5$ โดยทฤษฎีบท 1 อีกครั้งจะได้ว่า $(19)^3(288)^2 \equiv 1 \pmod 5$ ซึ่งแสดงว่าการหาร $(19)^3(288)^2$ ด้วย 5 จะเหลือเศษ 1 //

ทฤษฎีบท 7 : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $0 \le a, b \le m-1$ จะได้ว่า $a \not\equiv b \pmod m$ ถ้า $a \ne b$

พิสูจน์ : สมมติ $a < b$ เนื่องจาก $0 \le b \le m-1$ และ $a \ge 0$ เพราะฉะนั้น $0 < b-a \le m-1-a < m-1$ นั่นคือ $b - a$ ไม่เป็นพหุคูณของ m ซึ่งโดยบทนิยาม 1 ข้างต้นจะได้ว่า $a \not\equiv b \pmod m$ //

แบบฝึกหัด 15

1. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $(a+b) \equiv c \pmod m$ และ $b \equiv d \pmod m$ จงแสดงว่า $a+d \equiv c \pmod m$
2. จงหาจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $25 \equiv 4 \pmod n$
3. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า
   3.1 ถ้า $a \equiv b \pmod n$ และ $m|n$ แล้ว $a \equiv b \pmod m$
   3.2 จะมีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $(a+x) \equiv b \pmod n$
4. ถ้า $a \equiv b \pmod m$ และ $(a, m) = 1$ จงแสดงว่า $(b, m) = 1$
5. จงหาจำนวนเต็มบวก a ที่น้อยสุดที่ทำให้
   5.1 $a \equiv (22)(312) \pmod 7$
   5.2 $a \equiv (3)(7)(13)(515)(23) \pmod{11}$

5.3 $a \equiv 10^{515} \pmod 7$

6. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ หรือ $a^2 \equiv 1 \pmod 4$

บทนิยาม 3 : กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะนิยามการดำเนินการ $\oplus_n$ บน $\mathbf{Z}_n$ ซึ่งจะเรียกว่า*การบวกมอดูโล n (addition modulo n)* ดังต่อไปนี้

ถ้า $a, b \in \mathbf{Z}_n$ แล้วสัญลักษณ์ "$a \oplus_n b$" เราหมายถึงสมาชิก (เพียงตัวเดียว) c ของ $\mathbf{Z}_n$ ที่ซึ่ง $a+b \equiv c \pmod n$

ตัวอย่างเช่น

1. $2 \oplus_5 4 = 1$ เนื่องจาก $6 \equiv 1 \pmod 5$ และ $1 \in \mathbf{Z}_5$
2. $2 \oplus_5 1 = 3$ เนื่องจาก $3 \equiv 3 \pmod 5$ และ $3 \in \mathbf{Z}_5$
3. ตารางข้างล่างนี้แสดงการนิยามการดำเนินการ $\oplus_4$ บน $\mathbf{Z}_4$

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ข้อสังเกต : เราไม่อาจเขียน $7 \oplus_5 3$ หรือ $7 \oplus_5 3$ ไม่มีความหมาย เนื่องจาก $7 \notin \mathbf{Z}_5$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3 : กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

1. $\oplus_n$ สอดคล้องคุณสมบัติการสลับที่ และการจัดหมู่
2. 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ $\mathbf{Z}_n$ ภายใต้ $\oplus_n$
3. มีสมาชิกตัวผกผันสำหรับแต่ละสมาชิกของ $\mathbf{Z}_n$ ภายใต้ $\oplus_n$

แบบฝึกหัด 16

บทนิยาม : สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n เราจะนิยามการดำเนินการ $\otimes_n$ บน Z_n โดยจะเรียกว่า *การคูณมอดูโล n (multiplication modulo n)* ดังต่อไปนี้

ถ้า $a, b \in Z_n$ แล้วสัญลักษณ์ " $a \otimes_n b$ " เราหมายถึงสมาชิก(เพียงตัวเดียว) c ของ $\mathbf{Z}_n$ ที่ซึ่ง $ab \equiv c \pmod{n}$

1. จงหาค่าของ $2 \otimes_5 3$, $2 \otimes_7 3$ และ $10 \otimes_{12} 7$
2. จงเขียนตารางนิยามการคูณมอดูโล n ดังต่อไปนี้
   2.1 $\otimes_4$ บน $\mathbf{Z}_4$
   2.2 $\otimes_3$ บน $\mathbf{Z}_3$
   2.3 $\otimes_6$ บน $\mathbf{Z}_6$
3. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $\otimes_n$ สอดคล้องคุณสมบัติการจัดหมู่และการสลับที่
4. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จงหาสมาชิกเอกลักษณ์ของ $\mathbf{Z}_n$
5. จงหาว่าสมาชิกตัวใดบ้างของ $\mathbf{Z}_n$ ที่มีสมาชิกผกผันภายใต้การคูณมอดูโล n เมื่อ $n=3$ และ $n=4$
6. กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbf{Z}_n$ จงแสดงว่า

   $a \otimes_n (b \oplus_n c) = (a \otimes_n b) \oplus_n (a \otimes_n c)$
7. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $(a, n) = 1$ แล้วจะมี $b \in \mathbf{Z}_n$ ซึ่ง $a \otimes_n b = 1$
8. จงแสดงว่า n เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a, b \in \mathbf{Z}_n$ และ $a \otimes b = 0$ แล้ว $a=0$ หรือ $b=0$
9. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $<\mathbf{Z}_n; \otimes_n>$ เป็นกลุ่ม
10. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3

4.5 การพิสูจน์ลิมิตเป็นจริงและเป็นเท็จ

สัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

อ่านว่า "ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a" ซึ่งมีความหมายว่า ไม่ว่าจะกำหนดบริเวณใกล้ๆ L ให้เล็กลงเพียงใดก็ตาม เรายังคงหา x ในโดเมนของฟังก์ชันที่อยู่ใกล้ๆกับ a (นั่นคือในช่วงเปิดของ a ที่เล็กพอเหมาะ) ที่ทำให้ค่าของ $f(x)$ อยู่ในบริเวณ ของ L ดังกล่าวได้เสมอ

เนื่องจาก L เป็นจำนวนจริงการกล่าวถึงบริเวณหรือขอบเขตของ L ก็คือการกล่าวถึงช่วงที่มี L เป็นสมาชิกอยู่ดังนั้นเราจึงเขียนนิยามของลิมิตได้ด้วยข้อความทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ในบริเวณใกล้ๆ a (โดเมนของ f ไม่จำเป็นต้องรวม a) เราจะกล่าวว่า L เป็นค่าลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ $x \to a$ หรือในรูปสัญลักษณ์ "$\lim_{x \to a} f(x) = L$" ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ เราสามารถหาช่วง I (ที่เล็กพอเหมาะ) ได้ช่วงหนึ่งที่ทำให้

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \qquad (1)$$

เมื่อใดก็ตามที่ $x \in I-\{a\} \subseteq D(f)$ และ $a \in I$

เนื่องจาก (1) สมมูลกับ

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

และการกล่าวว่า $x \in I-\{a\} \subseteq D(f)$ และ $a \in I$ ก็สมมูลกับการมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ซึ่ง $x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\} \subseteq D(f)$ หรือ $0 < |x-a| < \delta$

เราจึงกล่าวได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อข้อความ

$$"(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon]" \qquad (2)$$

เป็นจริง

ตัวอย่าง 1 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to 3} (4x-5) = 7$ เป็นจริง

วิธีคิด : เราต้องแสดงว่าข้อความ (2) ข้างต้นเป็นจริง เมื่อ $f(x) = 4x-5$, $a = 3$ และ $L = 7$ การพิสูจน์จึงต้องเริ่มต้นด้วยการกำหนดให้ ε เป็นแต่ละจำนวนจริงบวก แล้วเลือก $\delta > 0$ เพื่อให้ได้ข้อความ

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(4x-5)-7| < \varepsilon \qquad (3)$$

เป็นจริง ปัญหาจึงอยู่ที่ว่าควรจะเลือก δ เป็นเท่าใด

เนื่องจาก (3) อยู่ในรูปประโยคเงื่อนไข "$p \to q$" เราจึงควรพิจารณาข้อสรุป q เสียก่อน คือ

(ง) $|(4x-5)-7| < \varepsilon$

แล้วหาว่าข้อความใดที่จะให้ข้อสรุปเป็น (ง) ซึ่งเห็นได้ชัดว่า

(ค) $|4x-12| < \varepsilon$

ให้ข้อสรุปเป็น (ง) [นั่นคือ $|4x-12| < \varepsilon \Rightarrow |(4x-5)-7| < \varepsilon$]

ต่อไปก็หาข้อความที่จะสรุปเป็น (ค) ได้ และเมื่อพิจารณาแล้วพบว่า

(ข) $4|x-3| < \varepsilon$

ให้ข้อสรุปเป็น (ค) และ

(ก) $0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$

ให้ข้อสรุปเป็น (ข) เพราะฉะนั้นขณะนี้เรามี

(ก) $0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$ (ข) $\Rightarrow$ (ค) $\Rightarrow$ (ง) $|(4x-5)-7| < \varepsilon$

ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับข้อความที่ต้องการคือ (3) แล้วจะพบว่าเราต้องเลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$ เพราะฉะนั้น

3. $\underbrace{0 < |x-3| < \delta \le \frac{\varepsilon}{4}}_{(ก)} \Rightarrow \underbrace{4|x-3| < \varepsilon}_{(ข)}$

$\Rightarrow \underbrace{|4x-12| < \varepsilon}_{(ค)}$

$$\Rightarrow \ |(4x-5)-7| < \varepsilon$$

(ง) //

ข้อสังเกต : 1. $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$ หมายความว่า $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ เป็นจำนวนจริงที่มากสุดที่จะให้การพิสูจน์ข้างต้นเป็นจริง ทั้งนี้เพราะการคิดหา δ พบว่า δ ควรเป็น $\frac{\varepsilon}{4}$ แต่ถ้า δ_1 ใช้ได้หรือเหมาะกับการพิสูจน์แล้ว จำนวนจริง δ อื่นๆที่น้อยกว่า δ_1 ก็จะใช้ได้กับการพิสูจน์เช่นเดียวกัน เพราะ "ถ้า $\delta \le \delta_1$ แล้ว $x < \delta \Rightarrow x < \delta_1$ " เป็นข้อความที่เป็นจริงเสมอ

2. จุดสำคัญของการแสดงว่าลิมิตเป็นจริง อยู่ที่จะเลือก δ เป็นเท่าใดและเมื่อหา δ ได้แล้ว การเขียนพิสูจน์จะเขียนย้อนกลับวิธีคิดเสมอ ดังตัวอย่างข้างต้น [ขอเน้นว่าการคิดหา δ ไม่ใช่วิธีแสดงว่าลิมิตเป็นจริง]

ตัวอย่าง 2 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to a} (mx+b) = ma+b$ เมื่อ m, a, และ b เป็นจำนวนจริง

วิธีหา δ : เมื่อกำหนด ε เป็นจำนวนจริงบวกตัวหนึ่ง และให้ $L = ma+b$ เราต้องการหาช่วงเปิด I ช่วงหนึ่งของ a ที่ทำให้อสมการ

$$(ma + b) - \varepsilon < mx + b < (ma + b) + \varepsilon \qquad (4)$$

เป็นจริงสำหรับทุก x ใน $I - \{a\}$ แต่ (4) สมมูลกับ

$$-\varepsilon < mx - ma < \varepsilon$$

หรือ

$$|m(x-a)| < \varepsilon \qquad (5)$$

ซึ่ง ถ้า $m>0$ หรือ $m<0$ แล้ว (5) จะสมมูลกับ

$$|x-a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$$

แต่ถ้า $m=0$ แล้ว (5) จะเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x เพราะว่า

$$|0(x-a)| = 0 < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับ

$$0 < |x-a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$$

เราจะได้อสมการ (5) ซึ่งสมมูลกับอสมการ (4) และสมมูลกับ

$$|mx-b-ma-b| < \varepsilon$$

เป็นจริง

เมื่อตรวจสอบดังนี้แล้วเราจึงควรเลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{|m|}$

พิสูจน์ : 1. กำหนด $\varepsilon > 0$

2. เลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{|m|}$

3. $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$

$\Rightarrow |m(x-a)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |mx+b-b-ma| < \varepsilon$

$\Rightarrow |(mx+b)-(ma+b)| < \varepsilon$ //

ตัวอย่าง 3 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to 3} (x^2-5) = 4$

วิธีเลือก δ : สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เราต้องการเลือก $\delta > 0$ เพื่อให้ได้ข้อความ

"$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2-5-4| < \varepsilon$"

เป็นจริง เราจึงเริ่มตรวจสอบข้อสรุปที่ต้องการ คือ

$$|x^2-5-4| = |x^2-9| < \varepsilon$$

หรือ

$$|x-3||x+3| < \varepsilon \qquad (6)$$

พิจารณา (6) ถ้า $|x+3| < k$ โดยที่ k เป็นจำนวนจริง แล้วขั้นตอนการหา δ จะเป็นเช่นตัวอย่าง 1 เพราะ $k|x-3| < \varepsilon$ ให้ข้อสรุปเป็น (6) ก็ต่อเมื่อ $|x+3| < \frac{\varepsilon}{k}$ ปัญหาจึงอยู่ที่ว่า k ควรเป็นเท่าใดหรือหาได้อย่างไร

เนื่องจากเราต้องการ $\delta > 0$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง

$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon$

และ $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x+3| < k$

จึงดูเหมือนว่า k จะเป็นฟังก์ชันของ δ แต่ถ้าพิจารณาว่า

(ก) ถ้า x อยู่ในช่วงซึ่ง $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว x จะอยู่ในทุกช่วง $0 < |x-3| < \delta_1$

ซึ่ง $\delta_1 \le 1$

และ (ข) เมื่อ x เข้าใกล้ 3 จะทำให้นิพจน์ $|x-3|$ เข้าใกล้ 0 และนิพจน์ $|x+3|$ **เข้าใกล้** 6 ดังนั้นช่วงที่ทำให้ $|x-3|$ เข้าใกล้ 0 จึงอาจเป็นช่วงซึ่ง

$$0 < |x-3| < 1$$

เราจึงต้องให้ $0 < |x-3| < 1$ ซึ่งทำให้ได้

$$0 < |x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1$$

$$\Leftrightarrow 5 < x+3 < 7$$

$$\Leftrightarrow |x+3| < 7$$

ซึ่งแสดงว่า $k=7$ แต่

$$0 < 7|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

แสดงว่า x ทั้งหลายซึ่งจะสอดคล้องกับ

$$0 < |x-3||x+3| < \varepsilon$$

นั้น ต้องอยู่ในช่วงซึ่ง

$$0 < |x-3| < 1 \quad \text{และ} \quad 0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

หรือเมื่อเลือก

$$\delta \le 1 \quad \text{และ} \quad \delta \le \frac{\varepsilon}{7}$$

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

2. เลือก $\delta \le \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ [เมื่อ $\min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ หมายถึงค่าที่น้อยกว่าระหว่าง 1 กับ $\frac{\varepsilon}{7}$]

3. เพราะฉะนั้น $\delta \le 1$ และ $\delta \le \frac{\varepsilon}{7}$

4. ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $0 < |x-3| < 1$ (จากข้อ 3)

5. $0 < |x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x - 3 < 1$

$\Rightarrow 5 < x + 3 < 7$

$\Rightarrow |x+3| < 7$

6. $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x+3||x-3| < 7\delta$ (จากข้อ 4 และข้อ 5)

7. $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3||x+3| < 7(\frac{\varepsilon}{7}) = \varepsilon$ (จากข้อ 3 และข้อ 6)

8. $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x+3||x-3| < 7\delta = |x+3||x-3| < \varepsilon$ //

ข้อตกลง : เราจะเรียก "1" ของ (ข) ในตัวอย่าง 3 ว่า "δ –*ค่าทดลอง*"

ตัวอย่าง 4 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = 12$

วิธีคิด : (ก) เนื่องจาก $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ จึงได้

$$\frac{x^3+8}{x+2} = x^2-2x+4 \quad , \quad x \neq -2$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x^2-2x+4)$

(ข) เราจะคิดหา $\delta > 0$ ให้สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้

$$|x^2-2x+4-12| < \varepsilon \tag{7}$$

แต่ $x^2-2x-8 = (x+2)(x-4)$ ดังนั้น (7) จึงสมมูลกับ

$$|x+2|\,|x-4| < \varepsilon \tag{8}$$

(ค) เมื่อ x เข้าใกล้ -2 จะได้ $|x+2|$ เข้าใกล้ 0 และ $|x-4|$ เข้าใกล้ 6 ดังนั้นจึงให้ δ –ค่าทดลองเป็น 1 $(0 < |x+2| < 1)$ หรือนั่นคือพิจารณา x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับ

$$-1 < x + 2 < 1 \quad \text{หรือ} \quad -3 < x < -1$$

ซึ่งทำให้ได้

$$-7 < x - 4 < -5 \quad \text{หรือนั่นคือ} \quad |x-4| < 7$$

แล้วได้

$$|x+2|\,|x-4| < 7|x+2|$$

(ง) แต่ $0 < 7|x+2| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x+2| < \frac{\varepsilon}{7}$ แสดงว่า x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับ (8) คือสมาชิกของเซต

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x+2| < 1\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x+2| < \tfrac{\varepsilon}{7}\}$$

หรือช่วง

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x+2| < \delta\} \quad \text{โดยที่} \quad \delta \leq \min\{1, \tfrac{\varepsilon}{7}\}$$

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$

3. เพราะฉะนั้น $\delta \le 1$ และ $\delta \le \frac{\varepsilon}{7}$

4. ถ้า $0 < |x+2| < \delta$ แล้ว $0 < |x+2| < 1$ และ $0 < |x+2| < \frac{\varepsilon}{7}$

5. $0 < |x+2| < 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1$

$\Rightarrow -7 < x-4 < -5$

$\Rightarrow |x-4| < 7$

6. $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |x+2||x-4| < 7(\frac{\varepsilon}{7}) = \varepsilon$

7. $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |x^2-2x+4-12| = |x+2||x-4| < \varepsilon$ //

ตัวอย่าง 5 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 2} 3x^3 = 24$

วิธีคิด : สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เราต้องการ $\delta > 0$ เพื่อให้ได้ข้อความ

"$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |3x^3-24| < \varepsilon$" (9)

เป็นจริง จึงเริ่มตรวจสอบสิ่งที่ต้องการคือ

(ก) $|3x^3-24| = 3|x^3-8| < \varepsilon$

แต่ $3|x^3-8| = 3|(x-2)(x^2+2x+4)| = 3|x-2||x^2+2x+4|$ ดังนั้น (9) จึงสมมูลกับ

$3|x-2||x^2+2x+4| < \varepsilon$ (10)

(ข) พิจารณาอสมการ (10) ถ้า $|x^2+2x+4| < k$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ แล้วขั้นตอนการหา δ จะเป็นเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ผ่านๆมา

(ค) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จะทำให้ $|x-2|$ เข้าใกล้ 0 และ $|x^2+2x+4|$ เข้าใกล้ 12 เราจึงอาจให้ δ - ค่าทดลอง เป็น 1 หรือนั่นคือพิจารณา x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับ

$0 < |x-2| < 1$

ซึ่งทำให้ได้

$0 < |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

$\Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow |x^2| = |x|^2 < 9$

และโดยกฎของอสมการสามเหลี่ยมจะได้

$$|x^2+2x+4| \;<\; |x^2|+2|x|+4 \;=\; |x|^2+2|x|+4 \;<\; 9+2(3)+4 \;=\; 19$$

ซึ่งแสดงว่า $k=19$

(ง) แต่

$$0 < (3)(19)|x-2| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{57}$$

แสดงว่า x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับ (10) ต้องเป็น x ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$0 < |x-2| < 1 \quad \text{และ} \quad 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{57}$$

หรือเมื่อเลือก

$$\delta \le 1 \quad \text{และ} \quad \delta \le \frac{\varepsilon}{57}$$

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \min\{1, \frac{\varepsilon}{57}\}$

3. เพราะฉะนั้น $\delta \le 1$ และ $\delta \le \frac{\varepsilon}{57}$

4. ถ้า $0 < |x-2| < \delta$ แล้ว $0 < |x-2| < 1$ และ $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{57}$

5. $0 < |x-2| < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x-2 < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 3$

$$\Leftrightarrow\; |x| < 3 \;\Leftrightarrow\; |x^2| \;=\; |x|^2 < 9$$

6. $0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |3x^3-24| \;=\; 3|x-2|\,|x^2+2x+4|$

$$< 3|x-2|(|x|^2+2|x|+4)$$

$$< 3(19)(\tfrac{\varepsilon}{57}) \;=\; \varepsilon \quad //$$

ตัวอย่าง 6 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} \;=\; 2$

วิธีคิด : สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เราต้องการให้ข้อความ

"$0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow\; |\sqrt{x}-2| < \varepsilon$"

เป็นจริง แต่ δ ที่จะเลือกเป็นฟังก์ชันของ ε เราจึงควรจัดนิพจน์ $|f(x)-L|$ โดยให้มี $|x-a|$ เป็นตัวประกอบด้วย ซึ่งสำหรับกรณีของตัวอย่างนี้เราจะได้

$$|\sqrt{x}-2| \;=\; \left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}\right| \;=\; \left|\frac{(x-4)}{\sqrt{x}+2}\right| \;=\; \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}$$

และเช่นเดียวกับตัวอย่างอื่นๆ เราจะให้ δ -ค่าทดลอง เป็น 1 ซึ่งทำให้ได้

$$0 < |x-4| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-4 < 1 \Leftrightarrow 3 < x < 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{x} < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}+2 < \sqrt{x}+2 < \sqrt{5}+2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}+2} > \frac{1}{\sqrt{x}+2} > \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{\sqrt{3}+2} < \frac{1}{3}$$

เพราะฉะนั้น $|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{3}|x-4|$

ซึ่ง

$$\frac{1}{3}|x-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-4| < 3\varepsilon$$

ดังนั้น δ ที่จะเลือกก็คือ

$\delta \le 1$ และ $\delta \le 3\varepsilon$

พิสูจน์ : 1. ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

2. เลือก $\delta \le \min\{1, 3\varepsilon\}$

3. เพราะฉะนั้น $\delta \le 1$ และ $\delta \le 3\varepsilon$

4. ถ้า $0 < |x-4| < \delta$ แล้ว $0 < |x-4| < 1$ และ $0 < |x-4| < 3\varepsilon$

5. $0 < |x-4| < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{3}$

6. $0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{3}(3\varepsilon) = \varepsilon$ //

ตัวอย่าง 7 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

วิธีคิด : เราต้องการเลือกหรือกำหนด $\delta > 0$ ให้กับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เพื่อให้ได้ข้อความ

" $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ "

เป็นจริง จึงเริ่มพิจารณา

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \tag{11}$$

แต่

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{x-3}{x}\right| = \frac{1}{3}\frac{|x-3|}{|x|}$$

ดังนั้นอสมการ (11) จึงสมมูลกับ

$$\frac{1}{3}\frac{|x-3|}{|x|} < \varepsilon \tag{12}$$

และเช่นเดียวกับตัวอย่างอื่นๆเราจะให้ δ -ค่าทดลองเป็น 1 หรือนั่นคือพิจารณา x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับ

$$0 < |x-3| < 1$$

ซึ่งจะได้

$$0 < |x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{|x|} = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$0 < |x-3| < 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{|x-3|}{|x|} < \frac{|x-3|}{6}$$

ซึ่ง

$$\frac{|x-3|}{6} < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < 6\varepsilon$$

หรือนั่นคือ δ ที่จะเลือกต้องมีเงื่อนไขว่า

$$\delta \le 1 \quad \text{และ} \quad \delta \le 6\varepsilon$$

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \min\{1, 6\varepsilon\}$

3. เพราะฉะนั้น $\delta \le 1$ และ $\delta \le 6\varepsilon$

4. ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $0 < |x-3| < 1$ และ $0 < |x-3| < 6\varepsilon$

5. $0 < |x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$

$$\Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{2}$$

6. $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\frac{|x-3|}{|x|} < \frac{1}{3}\cdot\frac{6\varepsilon}{2}$ //

ตัวอย่าง 8 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1$

วิธีคิด : สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เราต้องการเลือก $\delta > 0$ ที่ทำให้ได้ข้อความ

$$\text{"}0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+1} - 1\right| < \varepsilon\text{"}$$

เป็นจริง เราจึงเริ่มวิเคราะห์

$$\left|\frac{1}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \qquad (13)$$

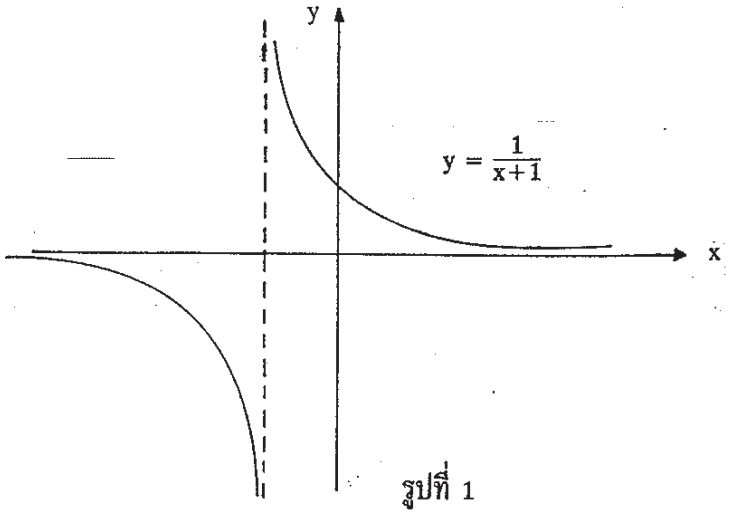
แต่

$$\frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

ดังนั้นอสมการ (13) สมมูลกับ

$$\frac{|x|}{|x+1|} < \varepsilon \qquad (14)$$

เช่นเดียวกับตัวอย่างอื่นๆ เมื่อพิจารณาอสมการ (14) แล้วพบว่าเราต้องการค่าคงที่ k ซึ่ง $\frac{1}{|x+1|} < k$ หรือ $|x+1| > \frac{1}{k} = K$ โดยสมมติ δ–ค่าทดลองเป็นค่าคงที่ ซึ่งตัวอย่างที่ผ่านๆมาเราใช้ δ–ค่าทดลองเป็น 1 แต่สำหรับตัวอย่างนี้ เมื่อพิจารณากราฟของ $y = \frac{1}{x+1}$ ดังรูปที่ 1 พบว่า



รูปที่ 1

(ก) จะมี x บางตัวที่สอดคล้องกับ $0 < |x| < 1$ แต่ทำให้ $\frac{1}{x+1}$ ไม่มีขอบเขต และ (ข) เมื่อพิจารณากราฟอย่างละเอียดแล้วพบว่า ถ้าต้องการกำจัด x ที่ทำให้ $\frac{1}{x+1}$ ไม่มีขอบเขตออกไป เราต้องกำหนด δ–ค่าทดลองให้เล็กกว่า 1

เราจึงให้ δ–ค่าทดลองเป็น $\frac{1}{2}$ หรือนั่นคือพิจารณา x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับ

$$0 < |x| < \frac{1}{2}$$

ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} 0 < |x| < \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x+1 < \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow 2 > \frac{1}{x+1} > \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{|x+1|} = \left|\frac{1}{x+1}\right| < 2 \end{aligned}$$

แต่ $0 < 2|x| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{\varepsilon}{2}$

ดังนั้น ถ้า $0 < |x| < \frac{1}{2}$ และ $0 < |x| < \frac{\varepsilon}{2}$ แล้วจะได้อสมการ (14) หรือนั่นคือเราต้องเลือก

$$\delta \le \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \delta \le \frac{\varepsilon}{2}$$

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

2. เลือก $\delta \le \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$

3. เพราะฉะนั้น $\delta \le \frac{1}{2}$ และ $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$

4. ถ้า $0 < |x| < \delta$ แล้ว $0 < |x| < \frac{1}{2}$ และ $0 < |x| < \frac{\varepsilon}{2}$

5. $0 < |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x+1|} < 2$ (จากวิธีคิด)

6. $0 < |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x+1} - 1\right| = \frac{|x|}{|x+1|} < 2 \cdot (\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ //

หมายเหตุ : การเลือก δ–ค่าทดลอง ในการแสดงว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ เป็นจริง สำหรับฟังก์ชัน f บางฟังก์ชันที่อาจหาค่าไม่ได้ที่บางจุดใกล้ๆ a เรานิยมให้เป็นค่าที่น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของระยะทางจาก a ไปยังจุดที่หาค่าของฟังก์ชันไม่ได้เหล่านั้น จุดที่ใกล้ a มากที่สุด

ตัวอย่าง 9 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^2-1} = -\dfrac{4}{3}$

วิธีคิด : สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เราต้องการเลือก $\delta > 0$ ที่จะทำให้ข้อความ

$$"0 < \left| x - \tfrac{1}{2} \right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{x^2-1} + \frac{4}{3} \right| < \varepsilon"$$

เป็นจริง เราจึงเริ่มวิเคราะห์ด้วยอสมการ

$$\left| \frac{1}{x^2-1} + \frac{4}{3} \right| < \varepsilon \tag{15}$$

แต่

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{4}{3} = \frac{3+4x^2-4}{3(x^2-1)} = \frac{4x^2-1}{3(x^2-1)}$$

$$= \frac{(2x-1)(2x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x-1)(x+1)}$$

ดังนั้น (15) จึงสมมูลกับ

$$\frac{\frac{4}{3}\left|x - \frac{1}{2}\right| \left|x + \frac{1}{2}\right|}{|x-1|\,|x+1|} < \varepsilon$$

เราจึงจะกำหนด δ–ค่าทดลองเพื่อให้ได้ $k\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ซึ่งโดยหมายเหตุท้ายตัวอย่าง 8 เราจึงเลือก δ–ค่าทดลองเป็น $\frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$ และทำให้ได้

$$0 < \left|x - \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{4} \Rightarrow \tfrac{1}{4} < x < \tfrac{3}{4} \Rightarrow \tfrac{3}{4} < x + \tfrac{1}{2} < \tfrac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \left|x+\tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{5}{4}$$

และ

$$0 < \left|x - \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{4} \Rightarrow \tfrac{1}{4} < x < \tfrac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -\tfrac{3}{4} < x-1 < -\tfrac{1}{4} \quad \text{และ} \quad \tfrac{5}{4} < x+1 < \tfrac{7}{4}$$

$$\Rightarrow |x-1| > \tfrac{1}{4} \quad \text{และ} \quad |x+1| > \tfrac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|x-1|} < 4 \quad \text{และ} \quad \frac{1}{|x+1|} < \frac{4}{5}$$

แต่ $\quad 0 < \dfrac{\frac{4}{3}\left|x - \frac{1}{2}\right|\left|x + \frac{1}{2}\right|}{|x-1|\,|x+1|} < (\frac{4}{3})(\frac{5}{4})(4)(\frac{4}{5})\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ

$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3\varepsilon}{16}$ เราจึงควรเลือกช่วงของ $\frac{1}{2}$ เป็นช่วงของ x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับ

$$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4} \quad \text{และ} \quad 0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3\varepsilon}{16}$$

หรือนั่นคือเลือก δ ซึ่ง

$$\delta \le \frac{1}{4} \quad \text{และ} \quad \delta \le \frac{3\varepsilon}{16}$$

พิสูจน์ :

1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก
2. เลือก $\delta \le \min\{\frac{1}{4}, \frac{3\varepsilon}{16}\}$
3. เพราะฉะนั้น $\delta \le \frac{1}{4}$ และ $\delta \le \frac{3\varepsilon}{16}$
4. ถ้า $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$ แล้ว $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ และ $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3\varepsilon}{16}$
5. ถ้า $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ แล้ว $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{5}{4}$ และ $\frac{1}{|x-1|} < 4$ และ $\frac{1}{|x+1|} < \frac{4}{5}$ (จากวิธีคิดข้างต้น)
6. $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2-1} + \frac{4}{3}\right| = \dfrac{\frac{4}{3}\left|x - \frac{1}{2}\right|\left|x + \frac{1}{2}\right|}{|x-1|\,|x+1|}$

$$< (\tfrac{4}{3})(\tfrac{5}{4})(4)(\tfrac{4}{5})\left|x-\tfrac{1}{2}\right|$$
$$\le (\tfrac{16}{3})(\tfrac{3\varepsilon}{16}) = \varepsilon \qquad //$$

เมื่อกล่าวว่า "x เข้าใกล้ a" เราหมายถึง x เข้าใกล้ a ทั้งจากทางซ้ายของ a และจากทางขวาของ a เราจึงพิจารณาช่วง

$$(a-\delta\ ,\ a+\delta) \qquad (\delta > 0) \tag{16}$$

ว่าเป็นบริเวณของ a แต่สำหรับลิมิตทางเดียวเป็นการพิจารณาเฉพาะเมื่อ x เข้าใกล้ a จาก

ทางด้านซ้าย หรือจากทางด้านขวาเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้นบริเวณที่ใกล้ๆ a เราจึงหมายถึงช่วงเพียงครึ่งซ้าย หรือครึ่งขวาของ (16) เท่านั้น ดังนั้นบทนิยามของลิมิตทางเดียวจึงเป็นดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ ณ.บริเวณใกล้ๆ a เราจะกล่าวว่า L เป็นค่าลิมิตซ้ายของ f(x) ขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายมือ หรือในรูปสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อข้อความ

(2.1) $\quad$ "$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$"

เป็นจริง

และเราจะกล่าวว่า L เป็นค่าลิมิตขวาของ f(x) ขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวามือ หรือในรูปสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อข้อความ

(2.2) $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$

เป็นจริง

ในทำนองเดียวกัน เมื่อกล่าวถึงสัญลักษณ์ "$x \to +\infty$" หรือ "$x \to -\infty$" เราหมายความว่า ไม่ว่าจะกำหนดจำนวนบวก N ที่ใหญ่มากเพียงใดก็ตาม จะมี x ซึ่ง $|x|$ ใหญ่กว่า N และอยู่ในโดเมนของฟังก์ชันที่เรากำลังพิจารณาเสมอ หรือนั่นคือ

$$x \in (N, +\infty) \quad \text{หรือ} \quad x \in (-\infty, N)$$

ดังนั้นการกล่าวว่า

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad (\text{หรือ} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L)$$

เป็นจริงจึงหมายความว่า สำหรับแต่ละช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ของ L ที่ถูกกำหนดขึ้น เราสามารถหาช่วงอนันต์ $(N, +\infty)$ (หรือ $(-\infty, N)$) ได้เสมอที่ทำให้

$$x \in (N, +\infty)(x \in (-\infty, N)) \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

และด้วยความหมายของการเข้าใกล้ "อนันต์" ดังกล่าว เราจึงสามารถอธิบายสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

ได้ว่า เมื่อใดก็ตามที่ทุกช่วงอนันต์ $(M, +\infty)$ ถูกกำหนดขึ้น เราจะสามารถเลือก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$x \in (a-\delta\ ,\ a+\delta) \Rightarrow |f(x)| \in (M\ ,+\infty)$$

ดังนั้นจากความคิดของลิมิตทางเดียว ลิมิตเมื่อ $|x| \to +\infty$ และลิมิตสู่อนันต์ เราจะได้นิยามของลิมิตรูปต่างๆดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ ณ.บริเวณใกล้ๆจำนวนจริง a หรือในช่วงอนันต์ ตามแต่กรณีตามลำดับต่อไปนี้ แล้วจะได้ว่า

(3.1) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$

(3.2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(|x| > N \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$

(3.3) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N > 0)(|x| > N \Rightarrow |f(x)| > M)$

(3.4) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)| > M)$

(3.5) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)| > M)$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงวิธีคิดหา δ เพื่อให้ข้อความของบทนิยาม 2 หรือบทนิยาม 3 ที่สอดคล้องสำหรับแต่ละตัวอย่างเป็นจริงเท่านั้น ส่วนการเขียนพิสูจน์จะละไว้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 10 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

วิธีเลือกหา δ : พิจารณาข้อความ (2.1) ของบทนิยาม 2 พบว่าเราต้องการอสมการ

$\sqrt{2-x} < \varepsilon$ หรือนั่นคือ $0 < 2-x < \varepsilon^2$

สำหรับทุกๆ x ที่สอดคล้องกับ $2-\delta < x < 2$ แต่

$$2-\varepsilon^2 < x < 2 \Rightarrow 0 < 2-x < \varepsilon^2$$

เราจึงเลือก $\delta \le \varepsilon^2$ //

ตัวอย่าง 11 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} = 1$

วิธีคิด : เนื่องจาก

$$\frac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} = 1 & , x \ge 2 \\ -1 & , x < 2 \end{cases}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} = \lim\limits_{x \to 2^+} 1$ และเนื่องจาก $f(x) = 1$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่เราจะได้ว่าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ข้อความ

$$2 < x < 2+\delta \Rightarrow |1-1| = 0 < \varepsilon$$

เป็นจริงเสมอ แสดงว่าเราจะเลือก δ เป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตามจะทำให้การแสดงว่าลิมิตเป็นจริงในกรณีนี้เป็นไปได้เสมอ //

ตัวอย่าง 12 : กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \le -1 \\ -2x & , -1 < x < 0 \\ \dfrac{2}{2-x} & , 0 < x < 2 \\ 1 & , x \ge 2 \end{cases}$$

จงแสดงว่า (1) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ (2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

และ (3) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$ เป็นจริง

วิธีคิด : กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

(1) เราต้องการเลือก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$-\delta < x < 0 \Rightarrow |f(x)-0| = |-2x| < \varepsilon$ (พิจารณาข้อความ (2.1) ของบทนิยาม 2)

แต่ $|-2x| = 2|x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x < 0$

เราจึงเลือก $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(2) เราต้องการเลือก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$0 < x < \delta \Rightarrow |f(x)-1| = \left|\frac{2}{2-x} - 1\right| = \left|\frac{x}{2-x}\right| < \varepsilon$

แต่เมื่อพิจารณา $\left|\frac{x}{2-x}\right| = \frac{|x|}{|x-2|} < \varepsilon$ แล้วพบว่าจะเป็นเช่นเดียวกับการพิสูจน์ลิมิตเป็นจริง ในกรณีที่ $|f(x)-L|$ ประกอบด้วยนิพจน์ใน x ตัวอื่นที่นอกเหนือจาก $|x-a|$ นั่นคือ ต้องสมมติ δ–ค่าทดลอง ซึ่งกรณีของตัวอย่างนี้ $a = 0$ และฟังก์ชันไม่มีขอบเขตเมื่อ $x \to 2$ จึงสามารถเลือก δ–ค่าทดลองเป็น 1 และจะทำให้ได้

$0 < x < 1 \Rightarrow |x| < 1$ และ $x-2 < -1$

$\Rightarrow |x| < 1$ และ $\frac{1}{|x-2|} < 1$

แต่ถ้า $\frac{1}{|x-2|} < 1$ แล้ว $\frac{|x|}{|x-2|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

ดังนั้น δ ที่ควรเลือกจึงเป็น $\delta \leq 1$ และ $\delta \leq \varepsilon$ หรือนั่นคือเลือก

$\delta \leq \min\{1, \varepsilon\}$

(3) เราต้องการเลือก $\delta > 0$ ที่ทำให้ข้อความ (2.1) และ (2.2) ข้างล่างนี้เป็นจริงพร้อมกันคือ

(2.1) $-1-\delta < x < -1 \Rightarrow |f(x)-2| = |2-2| = 0 < \varepsilon$

และ

(2.2) $-1 < x < -1+\delta \Rightarrow |f(x)-2| = |-2x-2| = |-2||x+1| < \varepsilon$

แต่ (2.1) เป็นจริงเสมอไม่ว่าจะเลือก δ อย่างไร เราจึงจะพิจารณาเลือก δ เฉพาะที่จะทำให้ (2.2) เป็นจริง ซึ่ง

$$|-2||x+1| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x+1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

เราจึงเลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$ //

ตัวอย่าง 13 : จงแสดงว่าลิมิตต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{4}{(x+3)^2} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2x+1}{3x} = -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = +\infty$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{1+x} = -\infty$

วิธีคิด : (1) สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M เราต้องการหาช่วง $(1, 1+\delta)$ ของ x ทั้งหลายที่ทำให้อสมการ

$$\frac{1}{x-1} > M$$

เป็นจริง แต่

$$\frac{1}{x-1} > M \Leftrightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{M}$$
$$\Leftrightarrow 1 < x < 1+\frac{1}{M}$$

เราจึงเลือก $\delta \le \frac{1}{M}$

(2) สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M เราต้องการหาช่วง $(-3-\delta\ ,\ -3+\delta)$ ของ x ทั้งหลายที่สอดคล้องกับอสมการ

$$\frac{4}{(x+3)^2} > M$$

แต่ $$\frac{4}{(x+3)^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{4}{(x+3)^2}} > \sqrt{M}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{(x+3)^2}} = \frac{2}{|x+3|} > \sqrt{M}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < |x+3| < \frac{2}{\sqrt{M}}$$

เราจึงเลือก $\delta \le \frac{2}{\sqrt{M}}$

(3) สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M เราต้องการหา δ เพื่อให้ได้ข้อความ

$$"-\delta < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+1}{3x} < -M"$$

เป็นจริง แต่

$$\frac{2x+1}{3x} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3x} < -M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3x} < -(M+\tfrac{2}{3})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} < -(3M+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{|x|} > 3M+2$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{3M+2}$$

เพราะฉะนั้น

$$-\frac{1}{3M+2} < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+1}{3x} < -M$$

ซึ่งแสดงว่าเราต้องเลือก $\delta \le \frac{1}{3M+2}$

(4) สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M เราต้องการ δ ที่ทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$"0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{(x-1)^2} < -M"$$

แต่

$$\frac{x-2}{(x-1)^2} < -M \Leftrightarrow \frac{|x-2|}{|x-1|^2} > M$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-1|^2}{|x-2|} < \frac{1}{M}$$

พิจารณานิพจน์ที่ต้องการ " $\frac{|x-1|^2}{|x-2|} < \frac{1}{M}$ " พบว่าเราต้องสมมติ δ – ค่าทดลอง เพื่อหาค่า k ที่ทำให้

$$\left|\frac{x-1}{x-2}\right| < k$$

ซึ่งโดยหมายเหตุท้ายตัวอย่าง 8 เราจึงสมมติ δ – ค่าทดลองเป็น $\frac{1}{2}$ และดังนั้น

$$0 < |x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3}{2} < x-2 < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |x-2| > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} < 2$$

แต่

$$\frac{|x-1|^2}{|x-2|} < 2|x-1|^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{2M}}$$

ดังนั้น δ ที่จะเลือกจึงต้องสอดคล้องกับทั้ง

$$\delta \le \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \delta \le \frac{1}{\sqrt{2M}}$$

เราจึงเลือก

$$\delta \le \min\left\{\frac{1}{\sqrt{2M}}, \frac{1}{2}\right\}$$

(5) สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε เราต้องการหาจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงคือ

$$"x > N \Rightarrow \left|\frac{x+3}{x-2} - 1\right| < \varepsilon"$$

แต่

$$\left|\frac{x+3}{x-2} - 1\right| = \left|\frac{x+3-x+2}{x-2}\right| = \frac{5}{|x-2|} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-2| > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x-2 > \frac{5}{\varepsilon} \quad \text{หรือ} \quad x-2 < -\frac{5}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x > 2+\frac{5}{\varepsilon} \quad \text{หรือ} \quad x < 2-\frac{5}{\varepsilon}$$

เราจึงเลือก $N \geq 2+\frac{5}{\varepsilon}$

(6) สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M เราต้องการหาจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงคือ

$$"x > N \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} > M"$$

แต่

$$\frac{x^2-1}{x+1} > M \quad \text{และ} \quad x \neq -1 \Leftrightarrow x-1 > M$$

$$\Leftrightarrow x > M+1$$

เราจึงเลือก $N \geq M+1$

(7) สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M เราต้องการเลือกจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้ได้ข้อความ

$$"x > N \Rightarrow \frac{1-x^2}{1+x} < -M"$$

เป็นจริง แต่

$$\frac{1-x^2}{1+x} < -M \quad \text{และ} \quad x \neq -1 \Leftrightarrow 1-x < -M$$

$$\Leftrightarrow x > 1+M$$

เราจึงเลือก $N \geq 1+M$ //

ตัวอย่าง 14 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีการนิยามดังตัวอย่าง 12 จงแสดงว่า

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ เป็นจริง

วิธีคิด : สิ่งที่เราต้องแสดงก็คือ $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2}{2-x} = +\infty$ หรือนั่นคือเราต้องการหา $\delta > 0$

สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$"2-\delta < x < 2 \Rightarrow \frac{2}{2-x} > M"$$

แต่

$$\frac{2}{2-x} > M \Leftrightarrow 0 < 2-x < \frac{2}{M} \Leftrightarrow -2 < -x < -2+\frac{2}{M}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 > x > 2-\frac{2}{M}$$

เราจึงเลือก $\delta \le \frac{2}{M}$ //

ในหลายๆตัวอย่างของการคำนวณค่าลิมิต "$\lim_{x \to a} f(x)$" เราพบว่าลิมิตอาจหาค่าไม่ได้ โดยเฉพาะกรณีที่ลิมิตซ้ายไม่เท่ากับลิมิตขวา หรือกรณีที่ค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาในช่วงๆหนึ่ง เช่น $\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ จึงทำให้เราไม่สามารถหาจำนวนจริง L ที่ทำให้

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ สำหรับแต่ละจำนวนจริง L จะได้ว่า

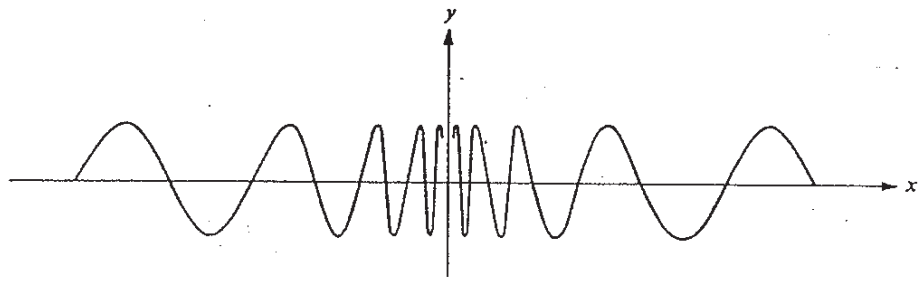
$$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$$

ซึ่งแสดงว่านิเสธของประพจน์ "$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon]$" เป็นจริง นั่นคือ

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq L \Leftrightarrow (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)[\exists x\ (0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-L| \ge \varepsilon)] \qquad (17)$$

ดังนั้นการแสดงว่าลิมิต $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้ เราจะต้องเลือกกำหนด $\varepsilon > 0$ ให้กับแต่ละจำนวนจริง L ที่ถูกสมมติให้เป็นค่าลิมิต แล้วได้ว่าสำหรับทุกจำนวน $\delta > 0$ (หรือนั่นคือ สำหรับทุกช่วงเปิดของ a ที่ไม่รวม a) เราจะหา $x \in (a-\delta\ ,\ a+\delta)$ ได้เสมอที่ทำให้ $|f(x) - L| \ge \varepsilon$

ตัวอย่าง 15 : กำหนดให้ $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $x \neq 0$ จงแสดงว่า $\lim_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้



รูปที่ 2

วิธีคิด : พิจารณาจากรูปที่ 2 จะสังเกตเห็นว่าทุกช่วงของ 0 [หรือทุก $\delta > 0$ ซึ่ง $x \in (-\delta, \delta)$] เราได้ค่า $f(x)$ เมื่อ x อยู่ในช่วงเหล่านี้เป็นค่าระหว่าง -1 กับ 1 ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง L ซึ่ง

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L$$

แล้ว $-1 < L < 1$ ซึ่งโดยข้อสังเกตว่าพิสัยของ $f(x)$ คือ $[-1, 1]$ เราจะสามารถหา $x \in (-\delta, \delta)$ เมื่อ δ เป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตามได้เสมอเพื่อทำให้

$$f(x) = \frac{|L|}{2}$$

และเพราะฉะนั้น ถ้า $\varepsilon \geq \frac{|L|}{2}$ เราจะได้

$$|f(x) - L| \geq \frac{|L|}{2} \geq \varepsilon$$

พิสูจน์ : กำหนดให้ L เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $-1 < L < 1$ เราจะเลือก $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$ และสำหรับแต่ละ $\delta > 0$ เราเลือก $x \in (-\delta, \delta)$ ที่ซึ่ง $f(x) = \frac{|L|}{2}$ เพราะฉะนั้นจะได้

$$x \in (-\delta, \delta) \quad \text{และ} \quad |f(x) - L| \geq \frac{|L|}{2} > \varepsilon$$

ตามต้องการ //

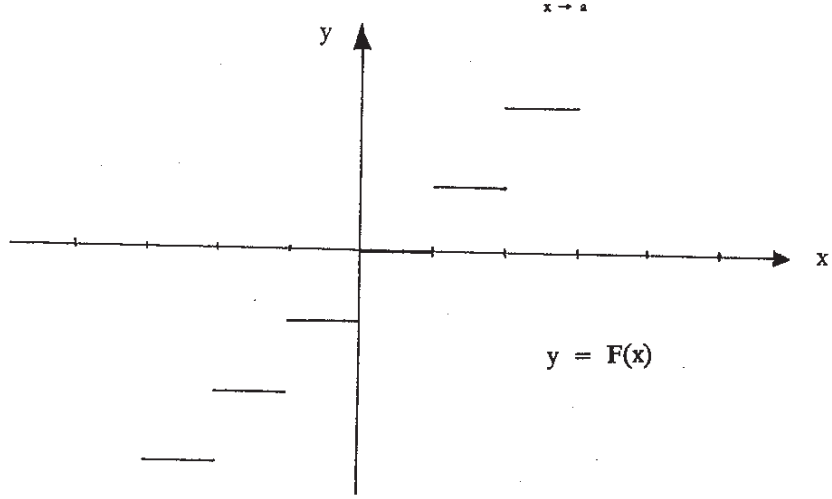
สังเกตจากตัวอย่าง 15 พบว่าการแสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ อาจทำได้โดยสมมติจำนวนจริง L ที่อาจเป็นค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นๆแล้วประพจน์ที่สมมูลกับ "$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$" ของ (17)

เป็นจริงเสมอ อย่างไรก็ตามวิธีพิสูจน์ในทางขัดแย้งกล่าวคือ "ถ้า L เป็นจำนวนจริงใดก็ตามที่สอดคล้องกับ "$\lim_{x \to a} f(x) = L$" แล้วจะมีข้อความขัดแย้งกันเองเกิดขึ้นเสมอ" ก็อาจถูกนำมาใช้เป็นวิธีแสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้เช่นกัน

ตัวอย่าง 16 : กำหนดให้

$$F(x) = [x]$$

โดยที่ $[x]$ เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนเต็มที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ x [กราฟของ $y = F(x)$ เป็นดังรูปที่ 3] จงแสดงว่าถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\lim_{x \to a} F(x)$ หาค่าไม่ได้



รูปที่ 3

สังเกตจากรูปที่ 3 จะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนเต็ม a ใ2ลักษณะที่เท่ากับหรือน้อยกว่า a แล้ว $F(x) \le a-1$ ในขณะที่เมื่อ x เข้าใกล้ a ในทางที่มากกว่า a แล้ว $F(x) \ge a$ เพราะฉะนั้นสำหรับ $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้เราสามารถเลือก $x \in (a , a+\delta)$ ซึ่ง $F(x) = a$ และ $x \in (a-\delta , a)$ ซึ่ง $F(x) = a-1$ ได้เสมอ

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม

2. สมมติให้ $\lim_{x \to a} F(x)$ หาค่าได้ นั่นคือมีจำนวนจริง L ที่ซึ่ง $\lim_{x \to a} F(x) = L$

3. เพราะฉะนั้นประพจน์ (2) ของบทนิยาม 1 เป็นจริงสำหรับ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ด้วย

4. เพราะฉะนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |F(x) - L| < \frac{1}{2}$

5. เลือก $\delta \le \min\{\delta_1, \frac{1}{2}\}$

6. ถ้า $a < x < a+\delta$ แล้ว $F(x) = a$ และทำให้ได้

$|F(x) - L| = |a-L| < \frac{1}{2}$

7. แต่ถ้า $a-\delta < x < a$ แล้ว $F(x) = a-1$ และทำให้ได้

$|F(x) - L| = |a-1-L| < \frac{1}{2}$

8. $|a-L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < a-L < \frac{1}{2} \Rightarrow L > a-\frac{1}{2}$

9. $|a-1-L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < a-1-L < \frac{1}{2} \Rightarrow L < a-1+\frac{1}{2} = a-\frac{1}{2}$

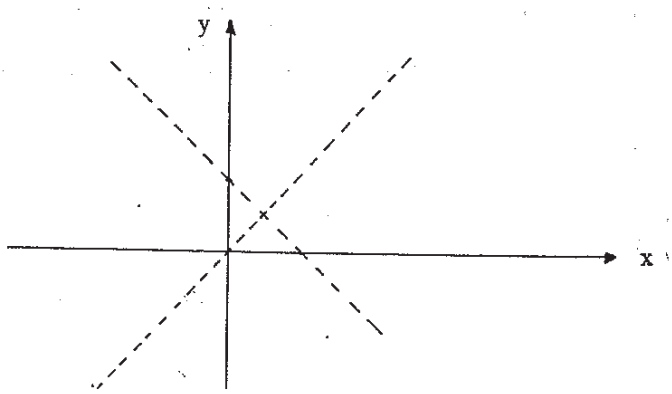
10. ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $L < a-\frac{1}{2}$ และ $L > a-\frac{1}{2}$

11. $L < a-\frac{1}{2}$ และ $L > a-\frac{1}{2}$ เกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้

12. นิเสธของข้อ 2 เป็นจริง //

ตัวอย่าง 17 : กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x & , x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 1-x & , x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

จงหาจำนวนจริง a ที่ทำให้ $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ และหาค่าไม่ได้ตามลำดับ



รูปที่ 4

วิธีทำ : (ก) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$

พิสูจน์ : 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \varepsilon$

3. ถ้า $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$ และ x เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$$|f(x) - L| = \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \le \varepsilon$$

4. ถ้า $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$ และ x เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว

$$|f(x) - L| = \left|1-x - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - x\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \le \varepsilon$$

5. เพราะฉะนั้น $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

(ข) ถ้า $a \in \mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $\mathbf{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

พิสูจน์ : เราจะพิสูจน์ในทางขัดแย้ง คือสมมติว่ามีจำนวนจริง L สำหรับแต่ละ $a \in \mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$ ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

กรณี 1 : $a < \frac{1}{2}$: ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon = \frac{1}{2} - a > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ได้ว่า

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{2} - a$

ซึ่งถ้า $a-\delta < x < a$ และ x เป็นจำนวนตรรกยะ แล้วจะได้ $1-x > 1-a$ และทำให้ได้

$$\frac{1}{2}-a > 1-x-L > 1-a-L \Rightarrow \frac{1}{2}-a > 1-a-L$$

$$\Rightarrow L > 1-a+a-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ในขณะที่ถ้า $a-\delta < x < a$ และ x เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว

$$a-\frac{1}{2} < x-L < a-L \Rightarrow a-\frac{1}{2} < a-L$$

$$\Rightarrow L < a-a+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow L < \frac{1}{2} \text{ และ } L > \frac{1}{2}$$

ซึ่ง $L > \frac{1}{2}$ และ $L < \frac{1}{2}$ เกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้

กรณี 2 : $a > \frac{1}{2}$: เราจะแสดงในทำนองเดียวกับกรณี 1 ว่าสำหรับ $\varepsilon = a-\frac{1}{2} > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < a-\frac{1}{2}$

แต่สำหรับกรณีนี้ถ้า $a < x < a+\delta$ และ x เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$$a-L < x-L < a-\frac{1}{2} \Rightarrow a-L < a-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L > a-a+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

แต่ถ้า $a < x < a+\delta$ และ x เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว

$$1-a-L > 1-x-L > \frac{1}{2}-a \Rightarrow 1-a-L > \frac{1}{2}-a$$

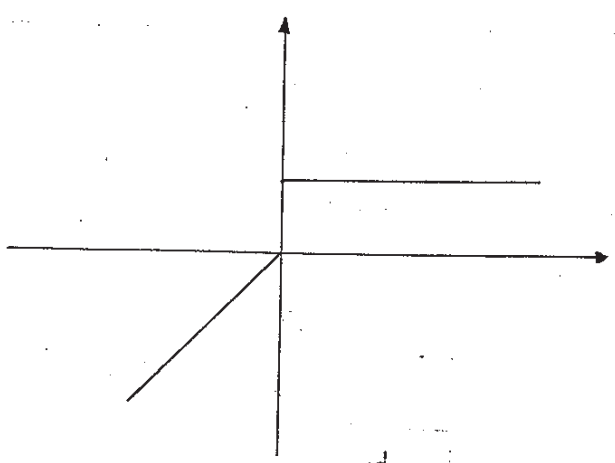
$$\Rightarrow L < 1-a+a-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

แสดงว่า $L < \frac{1}{2}$ และ $L > \frac{1}{2}$ เกิดขึ้นพร้อมกัน ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จะเห็นว่าข้อสมมติข้างต้นนำไปสู่ข้อความขัดแย้งกันเองไม่ว่ากรณีใด แสดงว่านิเสธของข้อสมมติเป็นจริง //

ตัวอย่าง 18 : กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x & , x \le 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้



รูปที่ 5

พิสูจน์ : 1. สมมติว่ามีจำนวนจริง L ที่ทำให้ได้ว่า $\lim_{x \to 0} f(x) = L$

2. สำหรับ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{2}$

3. ถ้า $0 < x < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| = |1-L| < \frac{1}{2}$ ซึ่งทำให้ได้ต่อไปว่า

$\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$

4. ถ้า $-\delta < x < 0$ แล้ว $|f(x) - L| = |x-L| < \frac{1}{2}$ ซึ่งทำให้ได้ต่อไปว่า

$-\frac{1}{2} < x-L < 0-L$ หรือนั่นคือได้ว่า $L < \frac{1}{2}$

5. เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$ และ $L < \frac{1}{2}$

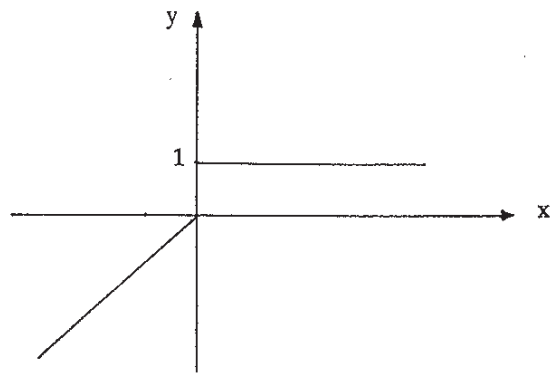
6. ข้อ 5 เกิดขึ้นไม่ได้ ดังนั้นข้อ 1 จึงเป็นจริง //

ข้อสังเกต : $\lim_{x \to a} f(x)$ เช่นดังตัวอย่าง 18 หาค่าลิมิตไม่ได้ เนื่องจากค่าลิมิตซ้ายและลิมิตขวา ซึ่งแม้จะหาค่าได้ทั้งสองค่า แต่ค่าทั้งสองไม่เท่ากัน ในกรณีเช่นนี้ ถ้าเราสมมติให้ L เป็นค่าลิมิตของฟังก์ชันแล้ว L ที่เป็นไปได้ ก็คือค่าลิมิตซ้ายหรือลิมิตขวาเท่านั้นนั่นเอง

เมื่อสังเกตการพิสูจน์ของตัวอย่าง 18 จะเห็นอีกด้วยว่าหาก L ที่ถูกสมมติขึ้นเป็นค่าลิมิตซ้าย (หรือลิมิตขวา) แล้วสำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่เหมาะสมที่เรากำหนดให้แน่นอนตัวหนึ่ง และไม่ว่า δ จะเป็นจำนวนบวกใดก็ตามเราสามารถเลือก $x \in (a, a+\delta)$ [หรือ $x \in (a-\delta, a)$ ในกรณีที่ L เป็นลิมิตขวา] ที่จะทำให้ $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ ได้เสมอ ซึ่งแสดงว่า ประพจน์ที่สมมูลกับ $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 19 : จงแสดงว่าลิมิตต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x & , x \le 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$



รูปที่ 6

วิธีทำ : สังเกตว่า 0 เป็นค่าลิมิตซ้ายเราจึงเลือก กำหนดให้ $\varepsilon \le 1$ และสำหรับแต่ละ $\delta > 0$ เราเลือก x ซึ่ง $x \in (0, \delta)$ แล้วจะได้

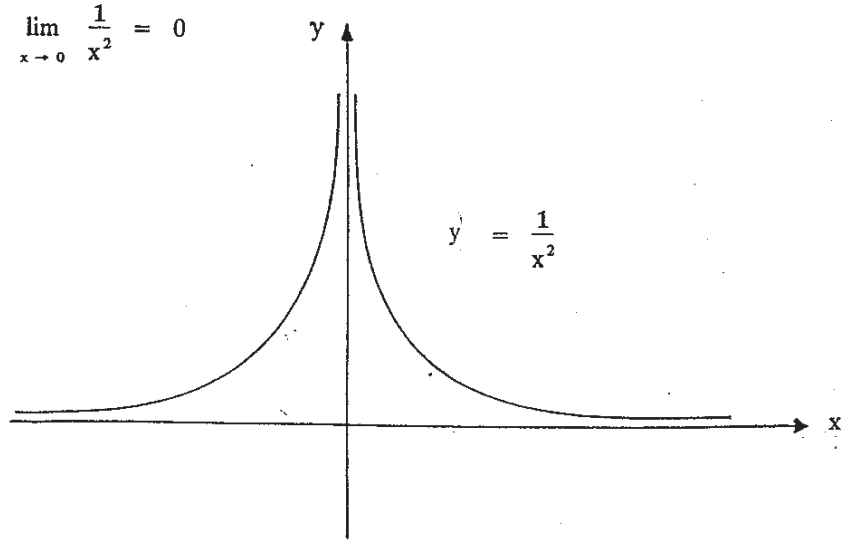
$$|f(x) - L| = |1-0| = 1 \ge \varepsilon$$

ซึ่งแสดงว่าประพจน์

$$(\exists 0 < \varepsilon \le 1)(\forall \delta > 0)(\exists x)[0 < x < \delta \Rightarrow |f(x)-0| > \varepsilon]$$

เป็นจริง หรือนั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \ne 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = 0$



รูปที่ 7

วิธีทำ : จากการสังเกตว่า

$$x \le 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} \ge 1$$

เราจึงเลือกให้ $\varepsilon \le 1$ และสำหรับแต่ละ $\delta > 0$ เลือก x ซึ่งสอดคล้องกับ

$$0 < x < 1 < \delta \quad \text{หรือ} \quad 0 < x < \delta < 1$$

แล้วแต่กรณี (ของ δ) ซึ่งจะทำให้ได้

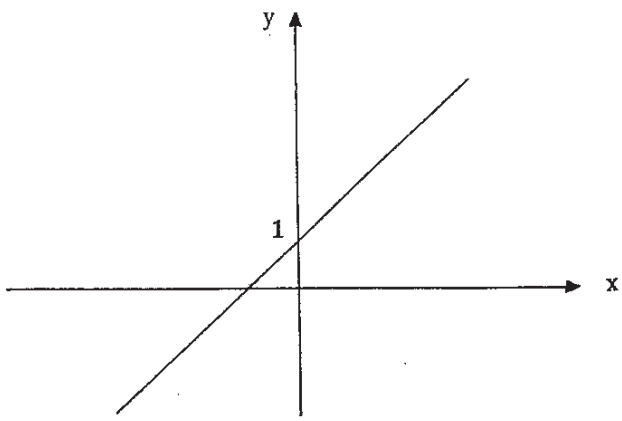
$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} > 1 \ge \varepsilon$$

ซึ่งแสดงว่าประพจน์

$$(\exists\varepsilon \le 1)(\forall\delta > 0)(\exists x)[0 < x < 1 < \delta \quad \text{หรือ} \quad 0 < x < \delta < 1 \quad \text{แต่} \quad \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \ge \varepsilon\ ]$$

เป็นจริง หรือนั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ne 0$

3. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x) = 4$



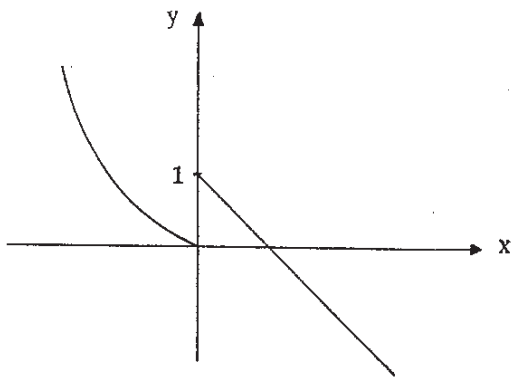
รูปที่ 8

วิธีทำ : สังเกตว่า $\lim\limits_{x \to 0} (1+x) = 1$ เป็นจริง เราจึงเลือกให้ $\varepsilon \le 3$ และสำหรับแต่ละ $\delta > 0$ เลือก $x \in (-\delta\ ,\ 0)$ ซึ่งจะทำให้ $x-3 < -3$ หรือก็คือ $|x-3| > 3 \ge \varepsilon$ ซึ่งแสดงว่าประพจน์

$$(\exists\varepsilon \le 3)(\forall\delta > 0)(\exists x)[-\delta < x < 0 \quad \text{และ} \quad |1+x-4| = |x-3| \ge \varepsilon\ ]$$

เป็นจริง หรือก็คือ $\lim\limits_{x \to 0} (1+x) \ne 4$

4. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 1 - x & , x < 0 \end{cases}$.



รูปที่ 9

วิธีทำ : สังเกตว่า 1 เป็นค่าลิมิตขวา เราจึงเลือกกำหนด $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ และสำหรับแต่ละ $\delta > 0$ เราเลือก x ซึ่งสอดคล้องกับ

$$-\frac{1}{2} < -\delta < x < 0 \quad \text{หรือ} \quad -\delta < -\frac{1}{2} < x < 0$$

แล้วจะได้

$$|f(x)-1| = |x^2-1| = |1-x^2| > \left|1-\frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4} > \varepsilon$$

หรือนั่นคือ ประพจน์

"$(\exists \varepsilon < \frac{1}{2})(\forall \delta > 0)(\exists x)(-\frac{1}{2} < -\delta < x < 0$ หรือ $-\delta < -\frac{1}{2} < x < 0$ แต่ $|f(x)-1| \ge \varepsilon$)"

เป็นจริง ซึ่งแสดงว่า $\lim_{x \to 0} f(x) \ne 1$

ตัวอย่าง 20 : จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} \frac{1-x^2}{1+x} = 1$ เป็นจริงหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจาก $\lim_{x \to 2} \frac{1-x^2}{1+x} = \lim_{x \to 2} (1-x) = -1 \ne 1$

เราจึงจะแสดงว่า $\lim_{x \to 2} \frac{1-x^2}{1+x} = 1$ เป็นเท็จ โดยการเลือกกำหนด $\varepsilon \le 2$ และสำหรับแต่ละ $\delta > 0$ เราจะเลือก x ซึ่ง $2 < x < 2+\delta$ ซึ่งจะทำให้ได้

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x} - 1\right| = |1-x-1| = |-x| = |x| > 2 \ge \varepsilon$$

หรือนั่นคือประพจน์

$$"(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)[\ x \in (2,\ 2+\delta) \subseteq (2-\delta\ ,\ 2+\delta) \text{ แต่ } \left|\frac{1-x^2}{1+x} - 1\right| \ge \varepsilon\ ]"$$

เป็นจริง ซึ่งแสดงว่า $\lim_{x \to 2} \frac{1-x^2}{1+x} \ne 1$ //

แบบฝึกหัด

จงเขียนบทนิยามสำหรับลิมิตที่เป็นจริงในข้อ 1 - 8 พร้อมทั้งเลือกหาจำนวนจริงบวก δ หรือ N ที่สอดคล้องกับแต่ละนิยาม สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε หรือ M ตามลำดับ

1. $\lim_{t \to 1^+} \sqrt{t^2 - 1} = 0$

2. $\lim_{t \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = -2$

3. $\lim_{x \to 0^+} \frac{2-x}{x} = +\infty$

4. $\lim_{x \to 0^-} \frac{2-x}{x} = -\infty$

5. $\lim_{x \to +\infty} \frac{t^2+t}{t^2-1} = 1$

6. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{2}{1-x}} = 0$

7. $\lim_{x \to +\infty} (\frac{x}{2} + \sin x) = +\infty$

8. $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x^2}) = +\infty$

9. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & , x \ne 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

จงเขียนการพิสูจน์ที่สมบูรณ์เพื่อแสดงว่า $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

10. กำหนดให้

ก. f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต [นั่นคือมีจำนวนจริง M ที่ซึ่ง $|f(x)| \le M$ ทุกๆ x ในโดเมนของ f]

และ ข. $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

จงแสดงว่า $\lim_{x \to 0} f(x) \cdot g(x) = 0$

จงเขียนประโยคสัญลักษณ์ที่สอดคล้องกับความเป็นจริงของลิมิตในแต่ละข้อ 11 และ 12 พร้อมทั้งเลือก ε หรือ M สำหรับแต่ละ δ หรือ N ที่จะสนับสนุนว่าประโยคสัญลักษณ์ที่ท่านเขียนนั้นเป็นจริง

11. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \le 1 \\ x^2 & , x > 1 \end{cases}$

12. $\lim_{x \to \infty} \sin x = 1$

13. จงแสดงว่า $\lim_{x \to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \le 1 \\ 2x-1 & , x \ge 1 \end{cases}$

หาค่าไม่ได้

14. กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริง และ F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $F(x) \le M$ สำหรับทุกๆ x ในโดเมนของ F จงแสดงว่า ถ้า $\lim_{x \to a} F(x) = L$ แล้ว $L \le M$

บรรณานุกรม

1. Behr, J. and Jungst, G., *Fundamentals of Elementary Mathematics : Geometry* , Academic Press, New York, 1972.
2. Copi, M., *Introduction to Logic* , Collier-Macmillan Ltd., 1979.
3. Dinkines, F., *Introduction to Mathematical Logic* , Appleton-Century-Crofts, Meredith Corporation , 1964.
4. Fujii, J., *An Introduction to the Elements of Mathematics* , John Wiley & Sons, Inc., 1961.
5. Gemignani, C., *Basic Concepts of Mathematics and Logic* , Addison-Wesley Publishing Company , 1968.
6. Hocutt, M., *The Elements of Logical Analysis and Inference* , Winthrop Publishers, Inc., 1979.
7. Jeffrey, R., *Formal Logic : Its Scope and Limits* , Mc Graw-Hill Book Company , 1989.
8. Mehlenbacher, E., *Foundations of Modern Mathematics* , Weber & Schmidt, Incorporated, 1967.
9. Schaaf, W., *Basic Concepts of Elementary Mathematics* , John Wiley & Sons, Inc., 1965.
10. Wilder, L. *Introduction to the Foundations of Mathematics* , Toppan Printing Company Ltd., 1965.
11. *Lecture Notes on Theory of Numbers and Algebras* , La Trobe University, 1985.
12. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ, *พีชคณิตแผนใหม่* , ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2527.
13. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ, *ลิมิตและความต่อเนื่อง* , โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร นครปฐม, 2533.
14. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ, *ทฤษฎีเซต* , ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2536.

15. ภัทรา เตชาภิวาทย์, *คณิตตรรกศาสตร์* , โรงพิมพ์สำนักส่งเสริมและฝึกอบรม มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2535.

16. อาริสา ฉัตรกิจวรุณ, *รากฐานคณิตศาสตร์* , ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, 2529.

บัญชีศัพท์

กฎการแทนที่ 48	Rules of Replacement
กฎการอ้างอิง 59	Inference Rules
กฎของการบ่งปริมาณ 102	Quantification Rules
กฎของเดอมอร์แกน 48	De Morgan's Law
กฎของตรรกศาสตร์ 7	Law of Logic
การคาดคะเน 11	assumptions
การคืนรูปปริมาณทั้งหมด 103	Universal Generalization
การคืนรูปปริมาณมีอยู่ 104	Existential Generalization
การคูณมอดูโล n 211	multiplication modulo n
การดำเนินการ (ทวิภาค) 154	(binary) operation
การบวกมอดูโล n 210	addition modulo n
การพิสูจน์โดยการกำจัดกรณี 81	Eliminating Proof
การพิสูจน์ด้วยข้อความแย้งสลับที่ 76	Contrapositive Proof
การพิสูจน์แบบมีเงื่อนไข 73	Conditional Proof
การพิสูจน์ทางตรง 66	Direct Proof
การพิสูจน์ทางอ้อม 78	Indirect Proof
การพิสูจน์ในทางขัดแย้ง 176	Proof by Contradiction
การลดรูปปริมาณทั้งหมด 102	Universal Instantiation
การลดรูปปริมาณมีอยู่ 105	Existential Instantiation
การวางนัยทั่วไปของการจัดหมู่ 162	General Associativity
การสรุปจากประสบการณ์ 6	induction
การสรุปจากหลักเกณฑ์ 6	deduction
การให้เหตุผลแบบนิรนัย 6	deduction
การอนุมาน 65	inference
กลุ่ม 181	group

กลุ่มข้อกำหนด 51, 52	premises
กลุ่มสลับที่ 184	Commutative Group
กลุ่มอาบีเลียน 184	Abelian Group
ข้อความ 28	statement
ข้อความขัดกัน 96	contrary
ข้อความขัดแย้ง 96	contradiction
ข้อความคาดคะเน 12	conjecture
ข้อความแจงเหตุสู่ผล 31	conditional statement
ข้อความเชิงประกอบ 28	compound statement
ข้อความตรงข้าม 33	opposite
ข้อความแย้งสลับที่ 33	contrapositive
ข้อความสมมูล 46	equivalence
ข้อความเสมือนขัดกัน 96	subcontrary
ข้อความเหตุ 32	antecedent
ข้อตกลง (กติกา) 11	postulates
ข้อโต้แย้ง 51	argument
ขั้นตอนการหาร 191	Division Algorithm
ข้อสรุป (ข้อยุติ) 32	conclusion
ความบริบูรณ์ 11	complete
ความเป็นเงื่อนไข 44	implication
ความสมเหตุสมผล 53	validity
ความสอดคล้องกัน 11	consistency
ค่าความจริง 27	truth-value

คุณสมบัติการกระจาย 185	Distributive Law
-การจัดหมู่ 161	Associative Law
-สลับที่ 158	Commutative Law
คุณสมบัติปิด 155	Closure Law
คู่อันดับ 142	ordered pairs
โครงสร้างพีชคณิต 178	Algebraic Structure
คอนกรูเอนซ์มอดูโล 205	congruence modulo
คำนิยาม 9	defined term
คำอนิยาม 3, 9	undefined term
เงื่อนไขจำเป็น 44	neccessary condition
เงื่อนไขเพียงพอ 43	sufficient condition
จตุรัสของการตรงกันข้าม 95	square of opposition
จำนวนคี่ 203	odd numbers
จำนวนคู่ 203	even numbers
จำนวนเฉพาะ 199	prime numbers
จำนวนเฉพาะต่อกัน 198	relatively prime
จำนวนประกอบ 199	composite numbers
จำนวนบวก 186	positive element
จำนวนลบ 186	negative element
เซตจำกัด 132	finite set
เซตชี้กำลัง 133	power set
เซตใหญ่สุด 142	greatest set
เซตดรรชนี 143	index set
เซตต่างสมาชิก 133	disjoint set

เซตเต็มหน่วย 189	discrete set
เซตเติมเต็ม 133	complement
เซตผลต่าง 133	different set
เซตเล็กสุด 143	smallest set
เซตว่าง 132	empty set
เซตอนันต์ 132	infinite set
โดเมน 93, 147	domain
ตรรกบท 51	syllogism
ตรรกบทที่สมเหตุสมผล 53	valid argument
ตรรกบทที่ไม่สมเหตุสมผล 52	invalid argument
ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ 27	Symbolic Logic
ตารางค่าความจริง 30	Truth Table
ตัวคูณร่วม 194	common multiples
ตัวคูณร่วมน้อย 194	least common multiple
ตัวเชื่อมการเลือก 29	Disjunction
ตัวเชื่อมความร่วม 29	Connection
ตัวเชื่อมนิเสธ 29	Negation
ตัวเชื่อมแบบมีเงื่อนไข 29	Conditional
ตัวเชื่อมประพจน์ 28	connectives
ตัวเชื่อมผันกลับได้ 29	Biconditional
ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด 92	universal quantifier
ตัวบ่งปริมาณมีอยู่ 92	existential quantifier
ตัวแปรมีขอบเขต 99	bound variable
ตัวแปรเสรี 96	free variable
ตัวประกอบ 190	factors

ตัวหาร 190	divisors
ตัวหารร่วม 195	common divisors
ตัวหารร่วมมาก 195	greatest common divisor
ตัวอย่างค้าน 86	counter example
ทฤษฎีบท 11	theorems
ทฤษฎีบทประกอบ 11	lemma
บทกลับ 32	converse
บทแทรก 12	corrollary
บทนิยาม 9	definitions
ประธาน 88, 89	subject terms
ประพจน์ 28	propositions
ประพจน์เชิงเดียว 28	simple propositions
ประโยคปิด 91	closed sentences
ประโยคเปิด 91	open sentences
ผลคูณคาร์ทีเซียน 142	cartesian product
ผลหาร 192	quotient
พีชคณิตของบูล 180	Boolean Algebra
พิสัย 147	range
ฟังก์ชันกำกัด 149	restriction
ฟังก์ชันความจริง 88	truth function
ฟังก์ชันแบบทั่วถึง 148	surjection

ฟังก์ชันไปบน 148	onto function
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง 148	one-to-one function
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง 149	bijection
ฟังก์ชันผกผัน 152	inverse function
ฟังก์ชันผลประกอบ 151	composition
ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง 149	1-1 correspondence
ฟิลด์ 185	field
ฟิลด์ที่เป็นอันดับ 186	ordered field
ภาคแสดง 89	predicate
เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก 156	orthogonal
ยูเนียน 133, 139	union
ระบบความสอดคล้องกัน 43	consistency
ระบบเรขาคณิตเชิงรีมันน์ 16	Riemannian Geometry
ระบบสัจพจน์ 9	Axiomatic Systems
ระบบสัจพจน์ของเปอาโน 17	Peano's Postulates
ระบบสัจพจน์ของยูคลิด 13	Euclidean System
เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด 16	non-Euclidean Geometry
เรขาคณิตบนระนาบ 16	Plane Geometry
หลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ 17	Principle of Mathematical Induction
วง 185	ring

ศูนย์ 185	zero
เศษเหลือ 192	remainder
สมาชิกผกผัน 165	inverse
สมาชิกหน่วย 185	unit element
สมาชิกเอกลักษณ์ 164	identity
สัจพจน์ 11	axioms
สัจนิรันดร์ 45	tautology
สับเซต 132	subset
สมมติฐาน 32	assumption
เหตุผลแบบอุปนัย 6	inductive reasoning
อินเตอร์เซคชัน 133, 140	intersection
อิมเมจ 147	image
อิมเมจผกผัน 147	inverse image
อิสระ 11	independence
อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ 129	Mathematical Induction
เอกภพ 93	universe
เอกภพสัมพัทธ์ 93	universe