บทที่ 4

กฎของโลปิตาล

L’Hôpital’s Rule

ในบทนี้เรานำอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาประยุกต์ใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน ปัญหาที่แรกที่เราพิจารณา คือการหาลิมิตของฟังก์ชันในรูปของผลหาร $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ x เข้าใกล้ c โดยที่ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$ เช่น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+2x-1}{3x} \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\ln x}$$

จากการศึกษาเรื่องลิมิตที่ผ่านมาเราทราบว่า

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} \tag{4.1.1}$$

เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ หาได้ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)\neq 0$

โดยปกติแล้วเมื่อเราต้องการหา $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เรามักลองใช้สมการ (4.1.1) ก่อนเสมอ แต่เราพบว่ามีหลายกรณีที่เราไม่สามารถนำสมการ (4.1.1) ไปใช้ได้ เช่นในการหา $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ เราใช้สมการ (4.1.1) ไม่ได้ ทั้งนี้เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ แต่ถ้าเราใช้ความรู้ทางพีชคณิตเข้าช่วยก่อนจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

หรือในการหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x+5}$ เช่นกัน เราใช้สมการ (4.1.1) ไม่ได้เพราะว่า $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+5)=+\infty$ เราอาจหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x+5}$ ได้ดังนี้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)} = 3$$

นอกจากการหาลิมิตของฟังก์ชันในรูปของผลหาร $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ x เข้าใกล้ c โดยที่ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$ ดังที่กล่าวในข้างต้นแล้ว เราจะศึกษาการหาลิมิตของฟังก์ชันในรูปของ $f(x)g(x)$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$ รูปของ $f(x)-g(x)$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ ต่างเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ รูปของ $f(x)^{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=1$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$

4.1 ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$

เราจะเริ่มต้นหัวข้อนี้ โดยการพิจารณาหาลิมิตของฟังก์ชันซึ่งนิยามในรูปของผลหาร $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ เมื่อ $x\to c$ (อาจพิจารณาแทนด้วย $x\to c^-, x\to c^+, x\to -\infty$ หรือ $x\to +\infty$) ในบทที่ 1 ได้กล่าวถึงการหาลิมิตของฟังก์ชันในรูปผลหารไว้ดังนี้ว่า ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L_1$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=L_2$ แล้ว $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$ เมื่อ $L_2\neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ อาจจะหาได้หรือหาไม่ได้ในกรณีที่ $L_2=0$ ยกตัวอย่างเช่น ถ้า $L_1\neq 0$ และ $L_2=0$ แล้ว $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ หรือลดลงเรื่อย ๆ เมื่อ x เข้าใกล้ a ซึ่งทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้แบบลิมิตมีค่าเป็นอนันต์ แต่ในกรณีที่ทั้ง L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากับ 0 พบว่า $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ อาจจะหาได้หรือหาไม่ได้ก็ได้ ดังตัวอย่างจากบทที่ 1 เราทราบว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ในขณะที่ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ ส่วน $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x^2}=+\infty$ แม้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} x$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2$ หาได้และมีค่าเท่ากับ 0 ก็ตาม

ด้วยเหตุที่เราไม่สามารถกำหนดค่าที่แน่นอนให้กับ $\dfrac{L_1}{L_2}$ เมื่อทั้ง L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากับ 0 ได้ เราจึงกล่าวว่า $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ ที่ c สำหรับ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$ ก็เช่นเดียวกัน เราพบว่า $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ อาจจะหาได้หรือหาไม่ได้ก็ได้ ยกตัวอย่างเช่น เราทราบว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}$ ต่างก็มีค่าเท่ากับ $-\infty$ แต่ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1/x}{1/x^3}=0$

ในขณะที่ $\lim_{x\to 0^-}\frac{1/x^3}{1/x}=+\infty$ ดังนั้นจึงอาจกล่าวว่า $\frac{f(x)}{g(x)}$ ดังกล่าวมีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c ซึ่งจะให้บทนิยามที่ชัดเจนดังนี้

บทนิยาม 4.1.1 เรากล่าวว่าฟังก์ชัน $\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ c ถ้า

$$\lim_{x\to c} f(x)=0 \text{ และ } \lim_{x\to c} g(x)=0$$

และเรากล่าวว่าฟังก์ชัน $\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c ถ้า

$$\lim_{x\to c} f(x)=\pm\infty \text{ และ } \lim_{x\to c} g(x)=\pm\infty$$

(สัญลักษณ์ $x\to c$ ในบทนิยามข้างต้นอาจแทนด้วย $x\to c^+$, $x\to c^-$, $x\to\infty$ หรือ $x\to-\infty$)

ในการหา $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ อาจทำได้โดยใช้กฎของโลปิตาล (L'Hôpital's rule) ที่เราจะกล่าวต่อไปซึ่งในการพิสูจน์กฎของโลปิตาลเราจำเป็น ต้องใช้สูตรของโคชี (Cauchy's formula) ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.2 (**สูตรของโคชี** : Cauchy's Formula)

ถ้าฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g ต่อเนื่องบน $[a,b]$ หาอนุพันธ์ได้บน (a,b) และ $g'(x)\neq 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน (a,b) แล้ว จะมี $w\in(a,b)$ ซึ่ง

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(w)}{g'(w)}$$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นขอให้สังเกตว่า $g(b)-g(a)\neq 0$ เพราะว่าถ้า $g(a)=g(b)$ แล้ว g จะสอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ ที่ทำให้มี $c\in(a,b)$ โดยที่ $g'(c)=0$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานของทฤษฎีบท

สำหรับ $x\in[a,b]$ เรานิยามฟังก์ชัน h ดังนี้ ให้

$$h(x)=\big(f(b)-f(a)\big)g(x)-\big(g(b)-g(a)\big)f(x)$$

เห็นได้ชัดว่า h ต่อเนื่องบน $[a,b]$ หาอนุพันธ์ได้บน (a,b) และ $h(a)=h(b)$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ ดังนั้นจะมี $w\in(a,b)$ ซึ่ง $h'(w)=0$ นั่นคือ

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(w)-\big(g(b)-g(a)\big)f'(w)=0$$

ดังนั้น

$$\frac{f'(w)}{g'(w)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \square$$

ขอให้สังเกตว่าถ้า g ในสูตรของโคชีเป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $g(x)=x$ แล้วเราจะได้ว่า

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(w)}{1}$$

ซึ่งสมการข้างต้นนี้สมมูลกับ

$$f(b)-f(a) = f'(w)(b-a)$$

แสดงให้เห็นว่าสูตรของโคชีเป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

ทฤษฎีบท 4.1.3 (**กฎของโลปิตาล** : L'Hôpital's Rule)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) ซึ่งอาจยกเว้นที่ $c\in(a,b)$ (นั่นคือ $f'(c)$ หรือ $g'(c)$ อาจหาไม่ได้) ถ้า $g'(x)\neq 0$ สำหรับทุก $x\neq c$ และ $x\in(a,b)$ และถ้า $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c แล้ว

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

เมื่อ $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาได้หรือมีค่าเท่ากับ $+\infty$ หรือ $-\infty$

ข้อความข้างต้นยังคงเป็นจริงเมื่อแทน $\lim\limits_{x\to c}$ ด้วย $\lim\limits_{x\to c^-}$ หรือ $\lim\limits_{x\to c^+}$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ และ $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ สำหรับจำนวนจริง L บางตัว เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ นิยามฟังก์ชัน F และ G ต่อไปนี้

ให้ $F(x)=f(x)$ เมื่อ $x\neq c$ และ $F(c)=0$ และ $G(x)=g(x)$ เมื่อ $x\neq c$ และ $G(c)=0$ จาก $\lim\limits_{x\to c}F(x)=\lim\limits_{x\to c}f(x)=0=F(c)$ แสดงว่า F ต่อเนื่องที่ c และจากสมมติฐานของทฤษฎีบทเราได้ว่า F ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน (a,b) และในทำนองเดียวกันเราได้ว่า G ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน (a,b) ยิ่งไปกว่านั้นสำหรับ $x\neq c$ เราได้ว่า

$$F'(x)=f'(x) \quad \text{และ} \quad G'(x)=g'(x)$$

เมื่อเรานำสูตรของโคชีมาใช้กับช่วง $[c,x]$ หรือ $[x,c]$ จะมีจำนวน w ที่อยู่ระหว่าง c และ x ซึ่ง

$$\frac{F(x)-F(c)}{G(x)-G(c)}=\frac{F'(w)}{G'(w)}=\frac{f'(w)}{g'(w)} \qquad (4.1.2)$$

เพราะว่า $F(x)=f(x), G(x)=g(x)$ และ $F(c)=G(c)=0$ ดังนั้นจากสมการ (4.1.2) เราได้ว่า

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(w)}{g'(w)}$$

เนื่องจาก w มีค่าอยู่ระหว่าง c และ x ดังนั้น

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(w)}{g'(w)}=\lim_{w\to c}\frac{f'(w)}{g'(w)}=L$$

ในกรณีที่ L เป็นจำนวนอนันต์ ($+\infty$ หรือ $-\infty$) เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน สำหรับบทพิสูจน์กรณีที่ $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ค่อนข้างยุ่งยากและซับซ้อนกว่านี้ จึงขอละการพิสูจน์ไว้ ผู้สนใจศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสขั้นสูงทั่วไป □

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ดังนั้น $\frac{\sin x}{x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ 0 โดยกฎของโลปิตาลจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

❍

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+2x-1}{3x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+2x-1)=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0}3x=0$ ดังนั้น $\frac{\cos x+2x-1}{3x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ 0 โดยกฎของโลปิตาลจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+2x-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\cos x+2x-1)}{\frac{d}{dx}(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2}{3}=\frac{2}{3}$$

❍

ข้อสังเกต

1.ความจริงแล้วเราต้องพิจารณาก่อนว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+2}{3}$ หาได้หรือไม่ก่อนที่จะเขียนว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+2x-1}{3x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+2}{3}$ แต่เพื่อทำให้ง่ายและสะดวกเราจึงนิยมเขียนดังที่เห็น

2. ในบางครั้งถ้าฟังก์ชัน $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ที่ c เราสามารถใช้กฎของโลปิตาลกับลิมิตของ $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ต่อไป จนกว่าฟังก์ชัน $\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ ไม่มีรูปแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ที่ c กล่าวคือ

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=\lim_{x\to c}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos(2x)\right)=0$ ดังนั้น $\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ ที่ 0 โดยกฎของโลปิตาลจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(e^x+e^{-x}-2)}{\frac{d}{dx}(1-\cos(2x))}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin(2x)}$$

เนื่องจาก $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2\sin(2x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ ที่ 0 เราจึงใช้กฎของโลปิตาลซ้ำอีกครั้งและได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(e^x-e^{-x})}{\frac{d}{dx}(2\sin(2x))}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos(2x)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}=\dfrac{1}{2}$ ❍

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหา $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cot x}{\ln x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ดังนั้น $\dfrac{\cot x}{\ln x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ที่ 0 โดยกฎของโลปิตาลเราได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}(\cot x)}{\frac{d}{dx}(\ln x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\csc^2 x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin^2 x}$$

เพราะว่า $\frac{-x}{\sin^2 x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ 0 เราจึงใช้กฎของโลปิตาลซ้ำอีกครั้งและได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}(-x)}{\frac{d}{dx}(\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sin x\cos x}=-\infty$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\ln x}=-\infty$ ❍

จากกฎของโลปิตาล เราทราบแต่เพียงวิธีการหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลหาร $\frac{f(x)}{g(x)}$ ที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่าคงตัวเท่านั้น แต่ในตอนต้นของหัวข้อนี้ได้มีการนิยามฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์ด้วยเช่นกัน ดังนั้นในลำดับต่อไปเราจะศึกษาวิธีในการหาลิมิตของฟังก์ชันเหล่านี้

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=L$ แล้วจะได้ว่า $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)=L$ เมื่อ F เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ สำหรับทุก ๆ $t\neq 0$ และในทางกลับกัน จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=L$ ถ้า $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)=L$ ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)$ เป็นค่าเดียวกัน ยกตัวอย่างเช่น $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to 0^+} x$ เป็นต้น

ในทำนองเดียวกันสำหรับกรณี $x\to -\infty$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{t\to 0^-} F(t)$ เป็นค่าเดียวกัน เพราะฉะนั้นสำหรับฟังก์ชันในรูปผลหาร $\frac{f(x)}{g(x)}$ ที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ เมื่อ $x\to +\infty$ จึงได้ว่า $\frac{F(t)}{G(t)}$ จะมีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ 0 เมื่อฟังก์ชัน $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ และ $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$ ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่า $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)=0$ และ $\lim\limits_{t\to 0^+} G(t)=0$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$ ตามลำดับ ซึ่งทำให้ในการหา $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ สามารถทำได้โดยการหา $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}$ นั่นเอง และด้วยเหตุนี้เราจึงสามารถสร้างกฎในลักษณะเดียวกับกฎของโลปิตาล เพื่อใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชันในรูปผลหารที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ เมื่อ $x\to +\infty$ ซึ่งกฎนี้มีชื่อเรียกว่า ภาคขยายของกฎของโลปิตาล

ทฤษฎีบท 4.1.8 (**ภาคขยายของกฎของโลปิตาล** : Extension of L'Hôpital's Rule)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่บนช่วงเปิด $(a,+\infty)$ เมื่อ $a>0$ ถ้า $g'(x)\neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,\infty)$ และถ้า $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ $x\to+\infty$ แล้ว

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

เมื่อ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาได้หรือมีค่าเท่ากับ $+\infty$ หรือ $-\infty$

ข้อความข้างต้นยังคงเป็นจริงเมื่อแทน $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ด้วย $\lim\limits_{x\to-\infty}$ โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่บนช่วงเปิด $(-\infty,a)$

บทพิสูจน์ ในที่นี้ขอละบทพิสูจน์ □

ตัวอย่าง 4.1.9 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{5x+2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+2)=+\infty$ ดังนั้น $\frac{3x+1}{5x+2}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ $x\to+\infty$ โดยกฎของโลปิตาลจะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{5x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}(3x+1)}{\frac{d}{dx}(5x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$ ❍

ตัวอย่าง 4.1.10 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ ดังนั้น $\frac{e^{3x}}{x^2}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ $x\to+\infty$ โดยกฎของโลปิตาลเราได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}e^{3x}}{\frac{d}{dx}x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{3x}}{2x}$$

เพราะว่า $\frac{3e^{3x}}{2x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ $x\to+\infty$ เราจะใช้กฎของโลปิตาลอีกครั้งและได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}(3e^{3x})}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9e^{3x}}{2} = +\infty$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2} = +\infty$ ❍

หมายเหตุ กฎของโลปิตาลใช้กับฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น หากฟังก์ชันดังกล่าวไม่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c เราไม่สามารถใช้กฎของโลปิตาลได้เช่น ในการหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{2x+x^2}$ เราจะเขียนว่า

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$$

ไม่ได้

ทั้งนี้เนื่องจาก $\dfrac{\cos x}{1+x}$ ไม่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนดที่ 0 ดังนั้นกฎของโลปิตาลไม่สามารถนำมาใช้ในการหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1+x}$ ได้

วิธีที่ถูกต้องคือ

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}1+x}=\frac{1}{1}=1$$

แบบฝึกหัด 4.1

จงหาลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\tan x-x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-e^x}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{2+\sec x}{3\tan x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cot x}{\cot 2x}$
13. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{\ln(1-2x)}{\tan \pi x}$
14. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(\ln x)}{\dfrac{1}{1-x}}$
15. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{5x^2+x+4}$
16. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\ln x}{x+\ln x}$
17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{3x}}{\ln x}$
18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
19. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2e^{3x}+\ln x}{e^{3x}+x^2}$

4.2 ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบอื่น ๆ

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ เราได้ทราบมาก่อนแล้วว่า $a-a=0, a\cdot 0=0, 1^a=1$ และถ้า $a\neq 0$ แล้ว $\dfrac{a}{a}=1, 0^a=0$ และ $a^0=1$ แต่ในการศึกษาเรื่องลิมิต เราได้เห็นมาแล้วจากตัวอย่าง 1.4.19 ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=-1$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$ แต่ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}\ -\sqrt{x^2-x})\neq 0$ ทำให้เราไม่สามารถระบุได้ชัดเจนว่า $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))$ มีค่าเท่าใด หรืออาจกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ ต่างมีค่าเท่ากับ $+\infty$ หรือ $-\infty$

สำหรับการหาลิมิตของ $f(x)g(x)$ พบว่า $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)$ ไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากับ 0 แม้ว่า $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ ซึ่งกรณีนี้เกิดขึ้นได้เมื่อ $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ มีค่าเป็นอนันต์ (ดูตัวอย่าง 4.2.2) ด้วยเหตุนี้เราจึงไม่สามารถระบุรูปแบบที่ชัดเจนให้กับ $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)$ ในกรณีนี้ได้หรือกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to c}g(x)=\pm\infty$

เช่นเดียวกับการหาลิมิตของ $f(x)^{g(x)}$ ในบางครั้งพบว่า $\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}$ ไม่สามารถระบุค่าได้ชัดเจน ยกตัวอย่างเช่น $\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}$ อาจจะไม่เท่ากับ 1 แม้ว่า $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ จะมีค่าเท่ากับ 0 ก็ตาม ซึ่งอาจจะเกิดขึ้นได้เมื่อ $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ มีค่าเท่ากับ 0 หรือมีค่าเป็นอนันต์ และเมื่อ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=1$ แต่ $\lim\limits_{x\to c}g(x)=\pm\infty$ เราก็ไม่อาจสรุปได้เช่นกันว่า $\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}$ จะมีค่าเท่ากับ 1 (ดูตัวอย่าง 4.2.4) เป็นต้น ดังนั้นเราจึงอาจสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดนั้นมีเพียง 7 รูปแบบ ดังนี้คือ

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty \text{ และ } \infty^0$$

ซึ่งในหัวข้อ 4.1 เราได้ศึกษาการหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยใช้กฎของโลปิตาล ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ และ ∞^0 ซึ่งการหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบเหล่านี้ เราไม่สามารถนำกฎของโลปิตาลมาใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบดังกล่าวได้ทันที วิธีการหนึ่งที่เราใช้กันคือการปรับรูปแบบของฟังก์ชันเหล่านี้ให้อยู่ในรูปของ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อนแล้วจึงใช้กฎของโลปิตาล เราจะเริ่มด้วยรูปแบบ $0\cdot\infty$

4.2.1 ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$

ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$ แล้ว $f(x)g(x)$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ ที่ c การหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ ทำได้โดยการจัดรูปฟังก์ชันให้มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c ดังนี้

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{หรือ} \quad f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ซึ่งการเลือกเขียนให้อยู่ในรูปแบบใดขึ้นอยู่กับว่าการหาอนุพันธ์ของรูปแบบใดทำได้ง่ายกว่ากัน จากนั้นจึงนำเอากฎของโลปิตาลมาใช้ในการหาลิมิตขอให้นักศึกษาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.1 จงหา $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ ดังนั้น $x\ln x$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ ที่ 0 และจะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ และ $\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ 0

โดยกฎของโลปิตาลเราได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ ❍

ตัวอย่าง 4.2.2 จงหา $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to \infty} x=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\frac{1}{x}=0$ ดังนั้น $x\sin\frac{1}{x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ เมื่อ $x\to+\infty$ เราอาจจัดรูปใหม่ได้ดังนี้ $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ และเมื่อแทนค่า $t=\frac{1}{x}$ เราได้ว่า

$$\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t}{1}=1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$ ❍

4.2.2 **ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ** $\infty - \infty$

ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$ แล้ว $f(x)-g(x)$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ ที่ c และเช่นเดียวกับกรณีที่ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty$ แล้ว $f(x)-g(x)$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ ที่ c ส่วนกรณีที่ลิมิตของ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นค่าอนันต์ทั้งคู่แต่ต่างเครื่องหมายกันจะเรียก $f(x)+g(x)$ ว่ามีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ ในการหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ นี้เราควรใช้ความรู้ทางพีชคณิตหรือตรีโกณมิติในการเขียน $f(x)-g(x)$ ให้อยู่ในรูปของผลหารของฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ จากนั้นจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้ ขอให้นักศึกษาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.3 จงหา $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x} = +\infty$ ดังนั้น $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ ที่ 0 เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$ และ $\frac{\sin x - x}{x\sin x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ 0 โดยการใช้กฎของโลปิตาลซ้ำกัน 2 ครั้งเราได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$$

❍

4.2.3 **ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ** 0^0, 1^∞ **และ** ∞^0

ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดกลุ่มสุดท้ายที่เราจะกล่าวถึงคือรูปแบบ 0^0, 1^∞ และ ∞^0 รูปแบบเหล่านี้เกิดจากฟังก์ชันในรูป $f(x)^{g(x)}$ กล่าวคือ

1. ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ แล้ว $f(x)^{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ 0^0 ที่ c
2. ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ แล้ว $f(x)^{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ 1^∞ ที่ c
3. ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ แล้ว $f(x)^{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ ∞^0 ที่ c

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันทั้ง 3 รูปแบบเราจะเริ่มต้นโดยให้

$$y = f(x)^{g(x)}$$

จากนั้นใส่ลอการิทึมฐาน e เข้าทั้ง 2 ข้างของสมการ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

ถ้า y มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ 0^0 ∞^0 หรือ 1^∞ ที่ $x=c$ แล้ว $\ln y$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ ที่ c จากนั้นเราสามารถเปลี่ยน $\ln y$ ให้มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ที่ c ดังในหัวข้อ 4.2.1 เนื่องจาก $\ln y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to c}\ln y = \ln\lim\limits_{x\to c} y$ ดังนั้น ถ้า $\lim\limits_{x\to c}\ln y = L$ แล้ว

$$\ln\lim_{x\to c} y = \lim_{x\to c}\ln y = L$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to c} y = \lim\limits_{x\to c} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to c}\ln y} = e^L$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^L$

จากที่กล่าวมาข้างต้นเราอาจสรุปแนวทางในการหา $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ เมื่อ $f(x)^{g(x)}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ 0^0, 1^∞ หรือ ∞^0 ที่ c ดังนี้

1. ให้ $y = f(x)^{g(x)}$
2. ใส่ลอการิทึมฐาน e เข้าทั้ง 2 ข้างของสมการใน (1) เราได้

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

3. หา $\lim\limits_{x\to c}\ln y$ ถ้าลิมิตดังกล่าวนี้มีค่า
4. ถ้า $\lim\limits_{x\to c}\ln y = L$ แล้ว $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^L$

ตัวอย่าง 4.2.4 จงหา $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)=1$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}=+\infty$ ดังนั้น $(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ 1^∞ ที่ 0 โดยแนวทางข้างต้นเราให้ $y=(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ จะได้ว่า

$$\ln y = \ln(1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \frac{1}{2x}\ln(1+3x) = \frac{\ln(1+3x)}{2x}$$

จะได้ว่า $\ln y$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ ที่ 0 ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+3x}(3)}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{จะได้ว่า } \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{3}{2}}$$ ❍

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหา $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ ดังนั้น x^x มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ 0^0 ที่ 0 โดยแนวทางข้างต้น เราให้ $y = x^x$ จะได้ว่า

$$\ln y = \ln x^x = x\ln x$$

จากนั้นหาลิมิต จะได้

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$ ❍

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหา $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x = +\infty$ และ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\cos x = 0$ ดังนั้น $(\tan x)^{\cos x}$ มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ ∞^0 ที่ $\frac{\pi}{2}$ โดยแนวทางข้างต้นเราให้ $y = (\tan x)^{\cos x}$ จะได้ว่า

$$\ln y = \ln(\tan x)^{\cos x} = (\cos x)(\ln\tan x) = \frac{\ln\tan x}{\sec x}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\ln y = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\sec x} \qquad (\text{มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ } \frac{\infty}{\infty} \text{ ที่ } \frac{\pi}{2})$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec x\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x} = e^0 = 1$ ❍

เราจะจบหัวข้อนี้โดยการกล่าวถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่สำคัญบทหนึ่งซึ่งใช้ความรู้ข้างต้นในการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.7 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

บทพิสูจน์ 1. ให้ $y = \sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}}$ จากนั้นใส่ลอการิทึมฐาน e เข้าทั้ง 2 ข้างของสมการ เราได้ว่า $\ln y = \ln \alpha^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln\alpha$ เมื่อหาลิมิตของ $\ln y$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to+\infty} \ln y = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\alpha = 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to+\infty} y = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = e^0 = 1$

2. ให้ $y = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ จากนั้นใส่ลอการิทึมฐาน e เข้าทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้ $\ln y = \ln n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln n$ เมื่อหาลิมิตของ $\ln y$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to+\infty} \ln y = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to+\infty} y = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = e^0 = 1$

3. ให้ $y = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ จากนั้นใส่ลอการิทึมฐาน e เข้าทั้ง 2 ข้างของสมการ เราได้ว่า $\ln y = \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)$ เมื่อหาลิมิตของ $\ln y$ เมื่อ $n\to+\infty$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to+\infty} \ln y = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-\frac{\alpha}{n^2}}{1+\frac{\alpha}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{n}} = \alpha$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to+\infty} y = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$ □

แบบฝึกหัด 4.2

จงหาลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cot x$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (1-\sin x)\tan x$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\tan x\right)\left(\ln(\sin x)\right)$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x$

6. $\lim\limits_{x\to 1^+} (1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\sec x-\tan x)$

8. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\csc\dfrac{x}{2}-\cot\dfrac{x}{2}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2x\right)^{3x}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^x$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

18. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

19. $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\tan(\pi x)}$

20. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x+2\sin x)^{\cot x}$