

ภาคผนวก 2

เฉลยแบบฝึกหัด

บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

แบบฝึกหัด 1.1

ข้อ	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$f(a)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
1	0	2	หาไม่ได้	2	0	$+\infty$
2	3	3	3	3	$+\infty$	0
3	$-\infty$	1	หาไม่ได้	1	$+\infty$	$+\infty$
4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	หาไม่ได้	0	-1
5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	หาไม่ได้	2	2
6	$+\infty$	$-\infty$	หาไม่ได้	หาไม่ได้	2	0

แบบฝึกหัด 1.2

1) 1.1 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องกับ

อสมการ $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว จะได้

$$|4x-5-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = \varepsilon$$

1.2 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \varepsilon$

2) 2.1 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \varepsilon^2$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องกับ

อสมการ $4 < x < 4 + \delta$ แล้ว จะได้

$$|\sqrt{x-4}-0| = \sqrt{x-4} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

2.2 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \varepsilon^2$

2.3 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \varepsilon$

2.4 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \varepsilon$

3) 3.1 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $M = \frac{1}{\varepsilon}$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่ง $x > M$ แล้ว
จะได้

$$\left| \frac{1}{x+2} - 0 \right| = \frac{1}{x+2} < \frac{1}{M+2} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

3.2 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $M = \frac{9}{2\varepsilon}$

3.3 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $M = \frac{1}{\varepsilon}$

3.4 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $M = \frac{2}{\varepsilon}$

4) 4.1 กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่ง
สอดคล้องกับอสมการ $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว จะได้

$$-\frac{1}{(x-3)^2} = -\frac{1}{|x-3|^2} < -\frac{1}{\delta^2} = -M$$

4.2 กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \frac{1}{M}$

5) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \frac{1}{M}$

6) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $\delta = \frac{1}{M}$

7) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง N เป็นค่ามากที่สุดของ M และ 3

8) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือกลง $N = \sqrt[3]{M}$

แบบฝึกหัด 1.3

1) 1.1	$\frac{1}{7}$	1.2	0
1.3	$\frac{4}{9}$	1.4	4
1.5	5	1.6	1
1.7	1	1.8	0
1.9	0	1.10	-4
2) 2.1	-28	2.2	-32
2.3	99	2.4	$-\frac{\sqrt{3}}{5}$

แบบฝึกหัด 1.4

- | | | | |
|--------|-------------------------|------|-----------------------|
| 1) 1.1 | $-\infty$ | 1.2 | $\sqrt{109}$ |
| 1.3 | 12 | 1.4 | 4 |
| 1.5 | 1 | 1.6 | $\frac{4}{3}$ |
| 1.7 | 0 | 1.8 | 0 |
| 1.9 | $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ | 1.10 | $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ |
| 1.11 | $\sqrt{3}$ | 1.12 | $+\infty$ |
| 1.13 | $-\infty$ | 1.14 | $+\infty$ |
| 1.15 | $-\frac{1}{6}$ | 1.16 | $+\infty$ |
| 1.17 | $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | 1.18 | 0 |

2) $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = -2, \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ หาไม่ได้

- | | | | |
|--------|---|-----|---------------|
| 3) 3.1 | 2 | 3.2 | $\frac{1}{2}$ |
| 3.3 | 0 | 3.4 | $\frac{1}{2}$ |
| 3.5 | 3 | 3.6 | $\frac{a}{b}$ |

แบบฝึกหัด 1.5

- | | | | |
|--------|---------|-----|----------|
| 1) 1.1 | 1 และ 2 | 1.2 | -1 และ 1 |
| 1.3 | 4 | 1.4 | 0 |

2) 2.1 ไม่สามารถนิยามค่าของ $f(0)$ เพื่อให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ ได้

2.2 นิยาม $f(0) = 2$

2.3 ไม่สามารถนิยามค่าของ $f(0)$ เพื่อให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ ได้

2.4 นิยาม $f(0) = 1$

3) $a + b = c + d + e$

4) ค่าของ a, b, c ทั้งหมดที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน \mathbb{R} คือ $a = k + 1, b = k$ และ $c = \frac{2k + 1}{4}$

เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

5) นิยามฟังก์ชัน f และ g โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

และ

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

จะได้ว่าฟังก์ชัน f และ g ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ แต่ฟังก์ชัน $f+g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

6) ข้อแนะนำ พิจารณาฟังก์ชัน g ซึ่งนิยามโดย $g(x) = f(x) - x$

บทที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด 2.2

1) 1.1 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 2

1.2 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=5$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

1.3 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 8

1.4 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{4}$

1.5 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=3$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $-\frac{4}{9}$

1.6 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=3$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 1

1.7 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

1.8 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=0$ หาค่าไม่ได้

1.9 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=0$ หาค่าไม่ได้

2) 2.1 $y+1 = -6(x-1)$

2.2 $y-2 = 2(x-2)$

2.3 $y = 2$

2.4 $y-4 = -\frac{1}{3}(x+3)$

2.5 $y-1 = 2(x-3)$

2.6 $y-\frac{3}{2} = -2(x+1)$

2.7 $y-3 = 5(x-1)$

2.8 $y-\frac{5}{3} = \frac{5}{3}(x+1)$

2.9 $y+1 = -\frac{1}{2}(x+1)$

2.10 $y+1 = \frac{3}{5}(x-2)$

3) $a = 4, b = -4$

4) $y + 1 = 5(x - 3)$

5) $y - 3 = -4(x + 2)$

6) สมการเส้นสัมผัสกราฟ $y = x^2$ ที่ $x = 1$ คือ $y - 1 = 2(x - 1)$

สมการเส้นสัมผัสกราฟ $xy = 1$ ที่ $x = 1$ คือ $y - 1 = -(x - 1)$

สมการเส้นตรงทั้งสองไม่ได้ตั้งฉากกัน

7) $3 + 5a$

แบบฝึกหัด 2.3

1) 1.1 4,0

1.3 0,0

1.5 6,-24

2) 2.1 36

2.3 123

2.5 4

2.7 24

1.2 34,120

1.4 $\frac{8}{27}, -\frac{8}{27}$

1.6 $-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}$

2.2 4

2.4 $\frac{59}{49}$

2.6 1,102

2.8 104

3) $y + 9 = -9(x - 2)$

4) $P(x) = 3x^2 - 3x - 5$

แบบฝึกหัด 2.4

1) 1.1 $\frac{dy}{dx} = 20x^3(75x^8 + 2)$

1.3 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3}{2}$

2) 2.1 $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 24x^2 - 64x$

2.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{10(x^3 - 2x + 4)^4((5x^2 + 1)(3x^2 - 2) - 10x(x^3 - 2x - 4))}{(5x^2 + 1)^6}$

1.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{2(2x + 1)}{(x + 1)^3}$

1.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{12(3x - 2)}{((3x - 2)^2 + 1)^2}$

$$= \frac{10(x^3 - 2x + 4)^4(5x^4 + 13x^2 - 40x - 2)}{(5x^2 + 1)^6}$$

$$2.3 \quad \frac{dy}{dx} = 8x(2x^2 + 1)(8x^3 - 1)^3 + 72x^2(2x^2 + 1)^2(8x^3 - 1)^2$$

$$2.4 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{40(8x-1)^4((3x-1)^3 + 1) - 9(3x-1)^2(8x-1)^5}{((3x-1)^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{9(8x-1)^4(48x^3 - 63x^2 + 26x + 1)}{((3x-1)^3 + 1)^2}$$

$$2.5 \quad \frac{dy}{dx} = 15 + \frac{2}{(x+1)^2} - 8x$$

$$2.6 \quad \frac{dy}{dx} = 8(2x+1)(x^2 + x)^7$$

$$3) \quad 3.1 \quad \frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = 4x(x^2 - 6)$$

$$3.2 \quad \frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{12(3x-2)}{((3x-2)^2 + 1)^2}$$

$$3.3 \quad \frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = -\frac{x+3}{(x+1)^3}$$

$$3.4 \quad \frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = 10x^9$$

$$3.5 \quad \frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = 4(x+1)(x^2 + 2x + 2)$$

4) 6

5) 21, -36

6) $f'(x^2) = \frac{x}{2}$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$

แบบฝึกหัด 2.5

$$1) \quad 1.1 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$1.2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} - x(x+3)(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + 9}$$

$$1.3 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3 + 24x^2 - 24x^3}{2(2-3x)^{3/2}(1+4x^3)^{1/2}}$$

$$1.4 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3(2-x)^{2/3}}$$

$$1.5 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{3}(2-x)^{2/3}$$

$$1.6 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{7}{2}(2-x)^{5/2} \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \text{ ซึ่ง } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$2) \quad 2.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2}{6y + 1}$$

$$2.2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4xy^3 - 12x^2 - 6x^2y^3 + y}{6x^3y^2 - x - 6y - 6x^2y^2}$$

$$2.3 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + 6y}$$

$$2.4 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} + x^2y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$2.5 \quad \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{x^2}{2(y-x^2)}$$

$$2.6 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + \frac{2x}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}}{6y - \frac{y}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$3) \quad 3.1 \quad -1$$

$$3.2 \quad \frac{1}{4}$$

$$4) \quad 0$$

$$5) \quad \frac{1}{2}$$

$$6) \quad -\frac{1}{64}$$

$$7) \quad \frac{1}{2}$$

$$8) \quad (-2,5), (-2,1)$$

$$9) \quad (0,0), \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$$

$$10) \quad (0,0), \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$$

$$11) \quad y+1 = -\frac{4}{5}(x-1)$$

$$12) \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$13) \quad L_1 : y = \frac{x}{\sqrt{3}}, L_2 : y = -\frac{x}{\sqrt{3}} \text{ หรือ } L_1 : y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, L_2 : y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

แบบฝึกหัด 2.6

$$1) \quad 1.1 \quad 1$$

$$1.2 \quad \frac{1}{3}$$

$$1.3 \quad \frac{1}{13}$$

$$1.4 \quad \frac{1}{12}$$

$$1.5 \quad \frac{1}{4}$$

$$1.6 \quad 12$$

$$2) \quad 13y = x+16$$

$$3) \quad 12y - x + 12 = 0$$

แบบฝึกหัด 2.7

1) 1.1 $\frac{6x^5 + 6x + 1}{x^6 + 3x^2 + 1}$

1.2 $\frac{18x}{3x^2 + 4}$

1.3 $\frac{6(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)(2x + 1)} \ln^2 \left(\frac{x^2 - 1}{2x + 1} \right)$

1.4 $\frac{x^2 + 6x - 1}{2(x^2 + 1)(x + 3)}$

1.5 $3x + 6x \ln x$

1.6 $\frac{x}{\ln 2} + 2x \log_2 x$

1.7 $\frac{-2x^2}{(16 - x^2) \ln 10} + \log(16 - x^2)$

1.8 $\frac{\ln(1 - x)}{x} - \frac{\ln x}{1 - x}$

2) 2.1 $y = x - 1$

2.2 $y = \frac{x}{e}$

2.3 $y = (1 + \ln 1)(x - 1)$

2.4 $y = 2x - 1$

3) 3.1 $(x^2 + 1)^x \left[\frac{2x^2}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \right]$

3.2 $(x + 1)^{2x-3} \left[\frac{2x-3}{x+1} + 2 \ln(x+1) \right]$

3.3 $(x^x)^2 (2 + 2 \ln x)$

3.4 $x^{x^2} (x + 2x \ln x)$

3.5 $\sqrt{(x^2 - 1)(x^2 + 2)} \left[\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{x}{x^2 + 2} \right]$

3.6 $(x^2 + 3x)(x^2 + x + 1) \sqrt{x^2 - 1} \left[\frac{2x + 3}{x^2 + 3x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x}{x^2 - 1} \right]$

3.7 $(x^3 + 5x)x^{\sqrt{x}} \left[\frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right]$

3.8 $(2^x 5^{x^2} 7^{x^3})(\ln 2 + 2x \ln 5 + 3x^2 \ln 7)$

3.9 $\frac{(x^3 - 1)^3 (x^{10} + 1)^4}{(2x + 1)^5} \left[\frac{9x^2}{x^3 - 1} + \frac{40x^9}{x^{10} + 1} - \frac{10}{2x + 1} \right]$

3.10 $\frac{\sqrt{x^2 + 3(x^2 + 1)^3}}{(x^2 - 1)^4} \left[\frac{x}{x^2 + 3} + \frac{6x}{x^2 + 1} - \frac{8x}{x^2 - 1} \right]$

3.11 $\frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}(x^2 + x)}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 - x + 1)^2} \left[\frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2x + 1}{x^2 + x} - \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2(2x - 1)}{x^2 - x + 1} \right]$

3.12 $\frac{3(x^2 + x + 1)^3 (x^2 + x)^2}{2(x^2 - x + 1)^3 (x^2 - x)^2} \left[\frac{3(2x + 1)}{x^2 + x + 1} + \frac{2(2x + 1)}{x^2 + x} - \frac{3(2x - 1)}{x^2 - x + 1} - \frac{2(2x - 1)}{x^2 - x} \right]$

แบบฝึกหัด 2.8

1) 1.1 $\frac{dy}{dx} = 0$

1.2 $\frac{dy}{dx} = 0$

1.3 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{-2^{\log_2 x} (\ln 2)^2}{x (\ln x)^2}$

1.6 $\frac{dy}{dx} = e^{x^2+x} (2x+1)$

1.7 $\frac{dy}{dx} = (2^{x^2+x}) (\ln 2) (2x+1)$

1.8 $\frac{dy}{dx} = e^{x^2+x} (4x^2 + 2x + 2)$

1.9 $\frac{dy}{dx} = 4^x (x \ln 4 + 1)$

1.10 $\frac{dy}{dx} = e^{-3x} (-3x^2 + 2x + 3)$

1.11 $\frac{dy}{dx} = 2^{\ln(2x)} \frac{\ln 2}{x}$

1.12 $\frac{dy}{dx} = (x^3 + 3x)^{x^2+2} \left[\frac{(3x^2 + 3)(x^2 + 2)}{x^3 + 3x} + 2x \ln(x^3 + 3x) \right]$

1.13 $\frac{dy}{dx} = (2x+1) \left[\frac{\ln 2}{2^{x^2+x}} - \frac{\ln 3}{3^{x^2+x}} \right]$

1.14 $\frac{dy}{dx} = 5^{-x} \left(\ln 5 (3^{x^2} - 2^{x^2}) + 2x (2^{x^2} \ln 2 - 3^{x^2} \ln 3) \right)$

2) 2.1 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

2.2 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

2.3 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2.4 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2.5 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 2^{\log_2 x} \frac{(\ln 2)^2}{x^2 (\ln x)^3} \left[2 + \ln x + \frac{(\ln 2)^2}{\ln x} \right]$

2.6 $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{x^2+x} [2 + (2x+1)^2]$

2.7 $\frac{d^2 y}{dx^2} = (2^{x^2+x}) (\ln 2) [2 + (2x+1)^2 \ln 2]$

2.8 $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{x^2+x} [8x + 2 + (4x^2 + 2x + 2)(2x+1)]$

3) 3.1 $y = 2x + 1$

3.2 $y = 2ex - e$

3.3 $y = \frac{x(e^2 - 1) + 2}{e}$

3.4 $y = ex - e$

4) $y = ex$

แบบฝึกหัด 2.9

1) 1.1 $\frac{dy}{dx} = 8\cos(8x+3)$

1.2 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

1.3 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec(\sqrt{x-1})\tan(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}}$

1.4 $\frac{dy}{dx} = -2x\csc(x^2+4)\cot(x^2+4)$

1.5 $\frac{dy}{dx} = -(3x^2-2)\csc^2(x^3-2x)$

1.6 $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sec^2(\sqrt[3]{5-6x})}{(\sqrt[3]{5-6x})^2}$

1.7 $\frac{dy}{dx} = -6x\sin(3x^2) + 18\tan^2(6x)\sec^2(6x)$

1.8 $\frac{dy}{dx} = -3\sin(6x) - 2e^{-2x}\cos(e^{-2x})$

1.9 $\frac{dy}{dx} = -5x^2\csc(5x)\cot(5x) + 2x\csc(5x)$

1.10 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + \cot\left(\frac{1}{x}\right)$

1.11 $\frac{dy}{dx} = (\tan x \sec^3 x)(3\tan^2 x + 2\sec^2 x)$

1.12 $\frac{dy}{dx} = \sec^2(4x)[8x^3\tan(4x) + 3x^2]$

1.13 $\frac{dy}{dx} = 5(\sin(5x) - \cos(5x))^4(5\cos(5x) + 5\sin(5x))$

1.14 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

1.15 $\frac{dy}{dx} = -9\cot^2(3x+1)\csc^2(3x+1)$

1.16 $\frac{dy}{dx} = -2(\sin(2x))e^{\cos(2x)}$

1.17 $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{1-\sin(4x)}$

1.18 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec(2x)}{\tan(2x+1)} \left[2\tan(2x) - 2\frac{\sec^2(2x+1)}{\tan(2x+1)} \right]$

1.19 $\frac{dy}{dx} = e^{-3x} \left[\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3\tan\sqrt{x} \right]$

1.20 $\frac{dy}{dx} = 4\csc(\cot(4x))\cot(\cot(4x))\csc^2(4x)$

1.21 $\frac{dy}{dx} = \frac{2\tan(2x)}{\ln(\sec(2x))}$

1.22 $\frac{dy}{dx} = -6(\tan(2x) - \sec(2x))^3\sec(2x)$

$$2) \quad 2.1 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 6 \sec^2(3x) [3 \sec^2(3x) + 6 \tan^2(3x)] \quad 2.2 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 150 \cot(5x) \csc^2(5x)$$

$$2.3 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = x \cos x + \sin x \quad 2.4 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \csc x \sec x (\tan x - \cot x)$$

$$2.5 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[4\sqrt{\tan x} \tan x - \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}} \right] \frac{\sec^2 x}{4 \tan x} \quad 2.6 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{\sin x} [\cos^2 x - \sin x]$$

$$2.7 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -18 \sec^2(3x)$$

$$2.8 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 16(2x+3)^2 [-4(2x+3)^4 \sin(2x+3)^4 + 3 \cos(2x+3)^4]$$

$$3) \quad 3.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{1 - x \cos y} \quad 3.2 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$3.3 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cos y - e^y}{x e^y + e^x \sin y} \quad 3.4 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x-y) - y \sin x}{\sin(x-y) - \cos x}$$

แบบฝึกหัด 2.10

$$1) \quad 1.1 \quad \frac{\pi}{4} \quad 1.2 \quad -\frac{\pi}{2}$$

$$1.3 \quad 0 \quad 1.4 \quad \frac{\pi}{4}$$

$$1.5 \quad \frac{1}{2} \quad 1.6 \quad 0$$

$$1.7 \quad \frac{4}{5} \quad 1.8 \quad \frac{4}{3}$$

$$2) \quad 2.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1 + (3x-5)^2} \quad 2.2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$2.3 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad 2.4 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

$$2.5 \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x} \left[\frac{-2}{1+4x^2} - \cot^{-1}(2x) \right] \quad 2.6 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x\sqrt{\sec^{-1}(3x)(9x^2-1)}}$$

$$2.7 \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \left[\frac{2x^2}{1+x^4} + 3 \tan^{-1}(x^2) \right] \quad 2.8 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos(2x)}{1 + \sin^2(2x)}$$

$$2.9 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-9(1 + \cos^{-1}(3x))^2}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$2.10 \quad \frac{dy}{dx} = x \left[\frac{1}{\sqrt{25x^2-1}} + 2 \sec^{-1}(5x) \right]$$

$$2.11 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4} \sin^{-1}(x^2)}$$

$$2.12 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

$$2.13 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$2.14 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}$$

$$2.15 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^2} \left[\frac{1}{x} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \right]^3 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \right]$$

$$2.16 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x \tan^{-1} x}{(x^2+1)^2}$$

$$2.17 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-e^x \cos(e^x)}{\sqrt{1-\sin^2(e^x)}}$$

$$2.18 \quad \frac{dy}{dx} = e^{2x} \left[2 \csc^{-1}(3x) - \frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}} \right]$$

$$2.19 \quad \frac{dy}{dx} = e^x \left[\cot^{-1}(3x^2) - \frac{6x}{1+9x^4} \right]$$

$$2.20 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{(1+4x^2) \tan^{-1}(2x)}$$

$$3) \quad 3.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ye^x - \sin^{-1} y - 2x}{\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} - e^x}$$

$$3.2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{1+x^2y^2} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x+y} - \frac{x}{1+x^2y^2}}$$

แบบฝึกหัด 2.12

$$1) \quad 1.1 \quad 5 \cosh(5x)$$

$$1.2 \quad \frac{4x \sinh \sqrt{4x^2+3}}{\sqrt{4x^2+3}}$$

$$1.3 \quad \frac{\sqrt{x} \operatorname{sech}^2 \sqrt{x} + \tanh \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$1.4 \quad -\cos \operatorname{ech}(e^{4x}) (4xe^{4x} \operatorname{coth}(e^{4x}) - 1)$$

$$1.5 \quad \frac{-2x \operatorname{sech}(x^2) ((x^2+1) \tanh(x^2) + 1)}{(x^2+1)^2}$$

$$1.6 \quad \frac{(\operatorname{coth} x)(\csc^2 x) - (\cot x)(\cos \operatorname{ech}^2 x)}{\cot^2 x}$$

$$1.7 \quad -(\cos \operatorname{ech}(x^3))(\operatorname{coth}(x^3))(3x^2)$$

$$1.8 \quad 2x \cosh(x^2+1)$$

$$1.9 \quad -3(\cos \operatorname{ech}^3 x)(\operatorname{coth} x)$$

$$1.10 \quad -6(\operatorname{sech}^2(3x))(\tanh(3x))$$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-2,5]$ คือ -1 เกิดขึ้นที่ $x = 5$

2.6 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-2,2]$ คือ 8 เกิดขึ้นที่ $x = 2$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-2,2]$ คือ 0 เกิดขึ้นที่ $x = 0$

2.7 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-1, \frac{1}{2}]$ คือ 0 เกิดขึ้นที่ $x = 0$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-1, \frac{1}{2}]$ คือ $-\frac{1}{2}$ เกิดขึ้นที่ $x = -1$ และ $\frac{1}{2}$

2.8 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[2,11]$ คือ $\frac{1}{3}$ เกิดขึ้นที่ $x = 4$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[2,11]$ คือ -1 เกิดขึ้นที่ $x = 2$

แบบฝึกหัด 3.2

1) 1.1 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = \frac{3}{2}$

1.2 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ หรือ $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$

1.3 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

1.4 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และ $0 \in [-1,1]$

1.5 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f(1) \neq f(4)$

1.6 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $1 \in [-2,2]$

1.7 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f'(-1)$ หาค่าไม่ได้ และ $-1 \in [-4,2]$

1.8 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{5\pi}{4}$

1.9 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f(2) \neq f(4)$

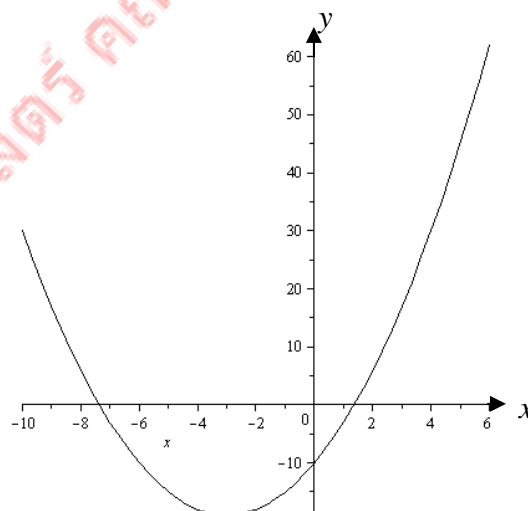
1.10 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และ $0 \in [-1,1]$

2) 2.1 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธยฐาน และ $c = 1$

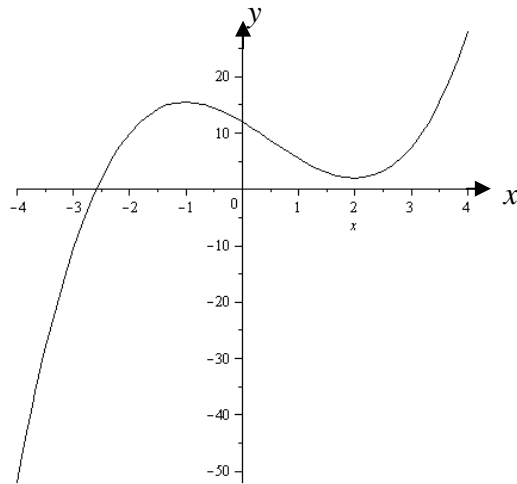
- 2.2 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธมิม เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ และ $0 \in [-1,1]$
- 2.3 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธมิม และ $c = (1/4)^{\frac{1}{3}}$
- 2.4 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธมิม และ $c = \frac{7-\sqrt{61}}{3}$
- 2.5 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธมิม และ $c = -1+\sqrt{2}$
- 2.6 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธมิม เนื่องจาก $f'(3)$ หาค่าไม่ได้ และ $3 \in [-1,4]$
- 2.7 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธมิม เนื่องจาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และ $0 \in [-8,8]$
- 2.8 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัธมิม เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ และ $1 \in [0,2]$
- 3) 3.1 ข้อแนะนำ: สำหรับ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ให้ $f(t) = \tan t$ สำหรับ $t \in [0, x]$
- 3.2 ข้อแนะนำ: สำหรับ $x > 0$ ให้ $f(t) = \arctan t$ สำหรับ $t \in [0, x]$
- 4) ข้อแนะนำ: ให้ใช้ทฤษฎีบท 3.2.7 กับฟังก์ชัน f และ ทฤษฎีบท 3.1.6 กับฟังก์ชัน f'

แบบฝึกหัด 3.3

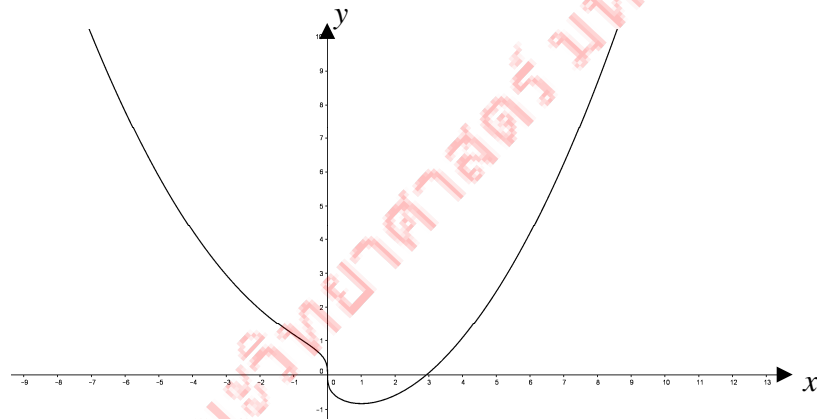
- 4) 4.1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-3, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, -3]$



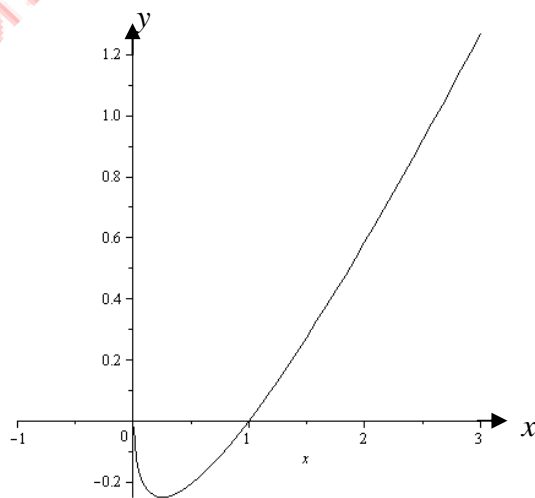
4.2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1]$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-1, 2]$



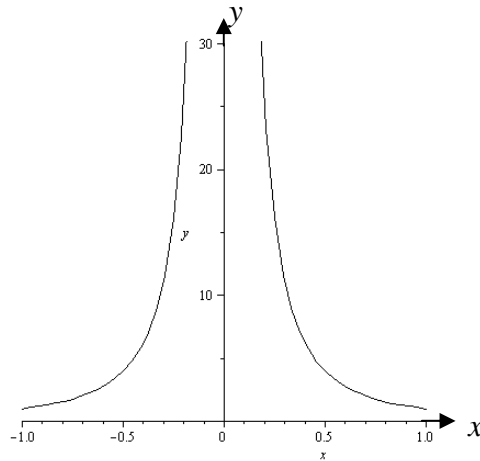
4.3 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 1]$



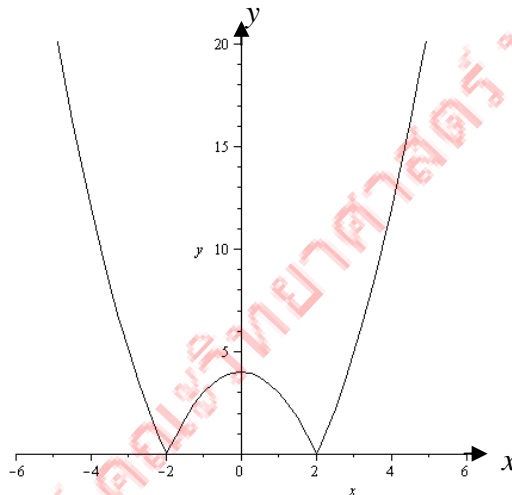
4.4 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[\frac{1}{4}, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, \frac{1}{4}]$



4.5 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0)$ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, \infty)$

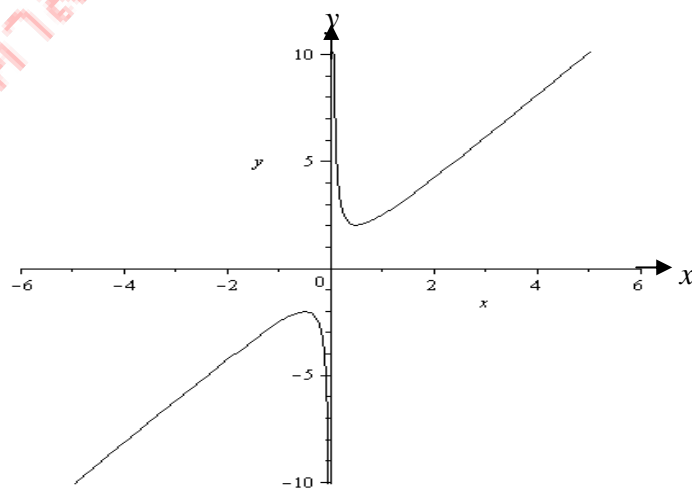


4.6 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-2, 0]$ และ $[2, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, -2]$ และ $[0, 2]$

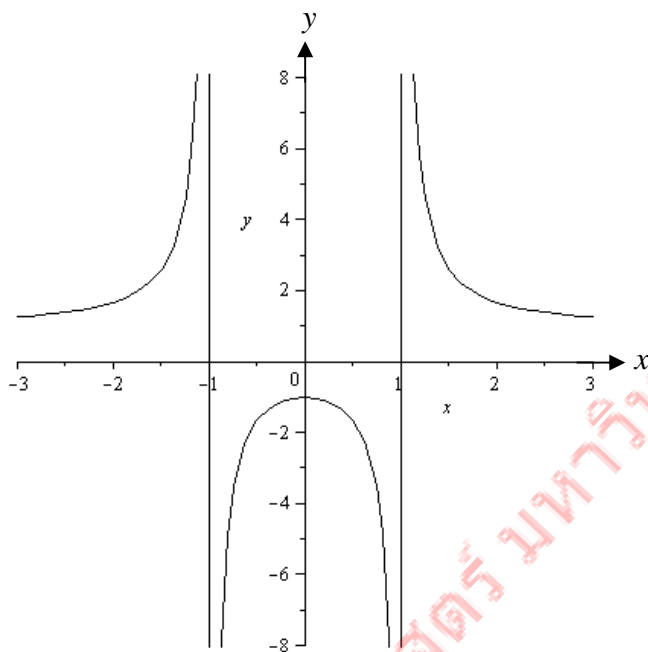


4.7 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ และ $[\frac{1}{2}, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-\frac{1}{2}, 0)$

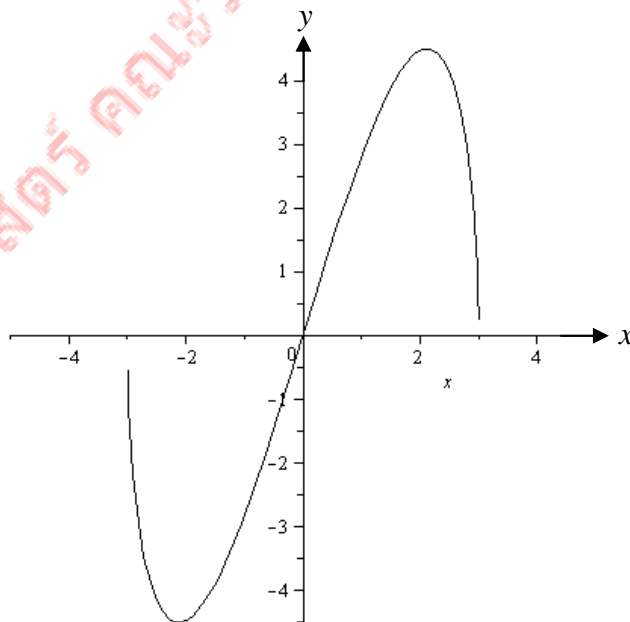
และ $(0, \frac{1}{2}]$



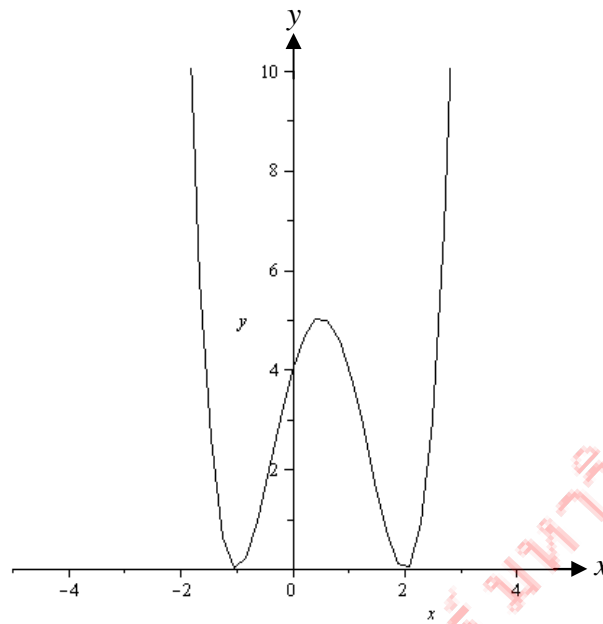
4.8 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1)$ และ $(-1, 0]$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, 1)$ และ $(1, \infty)$



4.9 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}]$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3, -\frac{3}{\sqrt{2}}]$ และ $[\frac{3}{\sqrt{2}}, 3]$



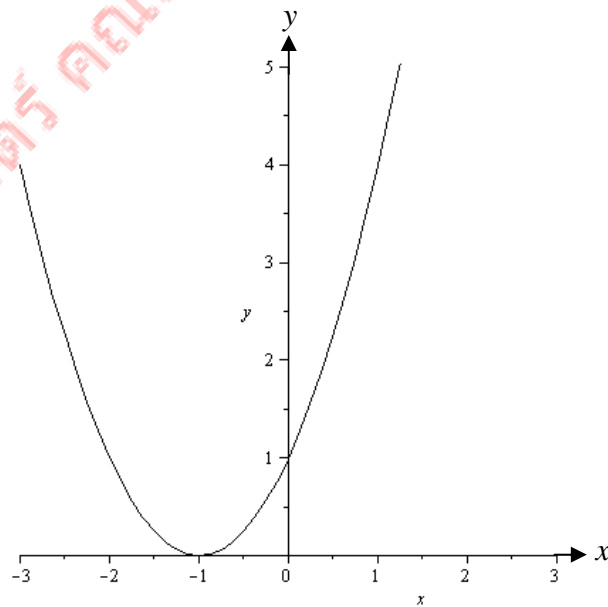
4.10 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, \frac{1}{2}]$ และ $[2, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, -1]$ และ $[\frac{1}{2}, 2]$



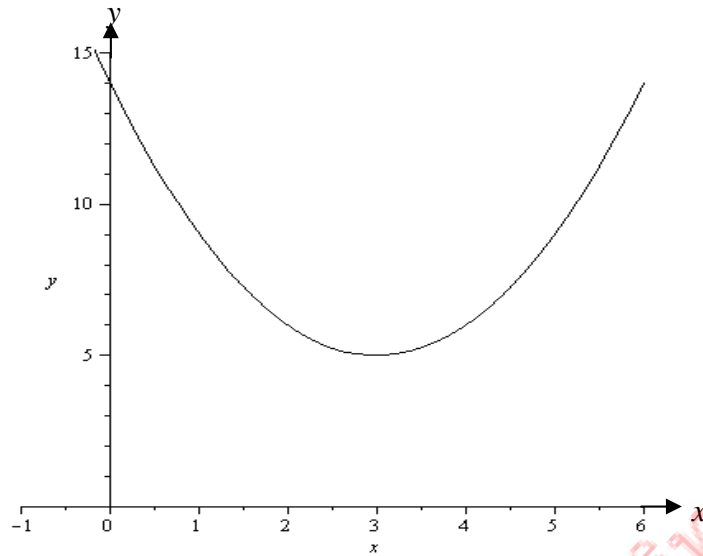
5) $a = 3$

6) $x < 25$

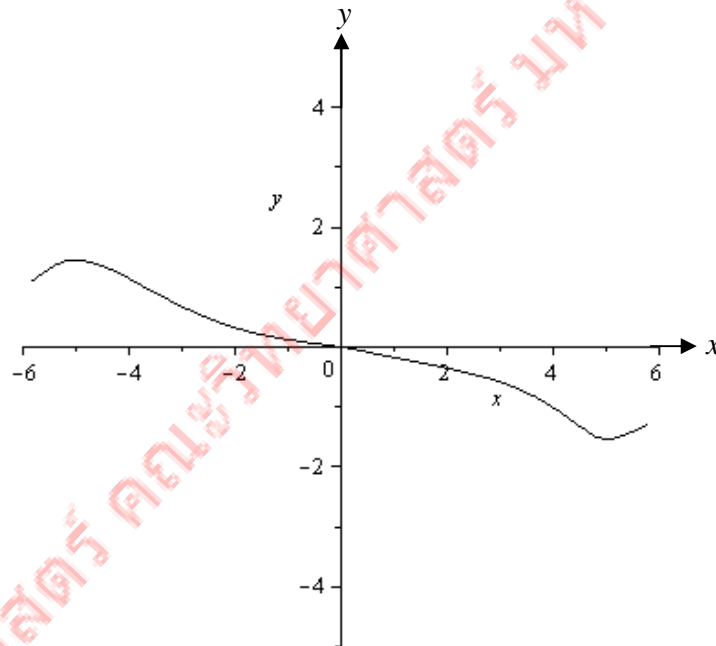
7) 7.1



7.2



7.3



8) 8.1 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-\frac{7}{8}) = \frac{129}{16}$ f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

8.2 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2) = 29$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(\frac{5}{3}) = -\frac{548}{27}$

8.3 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = 1$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(2) = f(-2) = -15$

8.4 f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = -3$

8.5 f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

8.6 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = -4$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1) = 4$

8.7 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f\left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right) = (2n-1)\pi + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f\left(2n\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2n\pi - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

8.8 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-\sqrt{3}) = \sqrt[3]{6\sqrt{3}}$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(\sqrt{3}) = \sqrt[3]{-6\sqrt{3}}$

8.9 f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

8.10 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2) = f(2) = 16$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2\sqrt{3}) = f(2\sqrt{3}) = f(0) = 0$

9) $a = \frac{3}{4}, b = 0, c = -\frac{9}{4}, d = \frac{1}{2}$

10) $a = 1, b = 0, c = -8, d = 0, e = 2$

แบบฝึกหัด 3.4

3) 3.1 f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty, 1]$ เป็นโค้งหงายบน $[1, \infty)$ จุด $(1, 1)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.2 f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty, 3]$ เป็นโค้งหงายบน $[3, \infty)$ จุด $(3, -24)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.3 f เป็นโค้งคว่ำบน $(-1, \infty)$ เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, -1)$ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

3.4 f เป็นโค้งคว่ำบน $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ เป็นโค้งหงายบน $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ จุด $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.5 f เป็นโค้งคว่ำบน $[2, \infty)$ เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, 2]$ จุด $(2, 0)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.6 f เป็นโค้งคว่ำบน $[1, 3]$ เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, 1]$ และ $[3, \infty)$

จุด $(3, 3)$ และจุด $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.7 f เป็นโค้งคว่ำบน $[0, 1]$ เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, 0]$ และ $[1, \infty)$

จุด $(0, 0)$ และจุด $(1, -1)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.8 f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty, -\sqrt{2}]$ และ $[0, \sqrt{2}]$ เป็นโค้งหงายเมื่อบน $[-\sqrt{2}, 0]$ และ $[\sqrt{2}, \infty)$

จุด $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, 28\sqrt{2})$ และ $(\sqrt{2}, -28\sqrt{2})$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

4) 4.1 จุดวิกฤตคือ $-\frac{2}{3}$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[-\frac{2}{3}, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $[-1, -\frac{2}{3}]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ f เป็นโค้งหงายบน $[-1, \infty)$ และ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

4.2 จุดวิกฤตคือ 0 และ 2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, 0]$ และ $[2, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $[0, 2]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(2) = \frac{5}{3}$ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = 3$

f เป็นโค้งหงายบน $[1, \infty)$ f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty, 1]$ จุดเปลี่ยนความเว้าคือ $(1, \frac{7}{3})$

4.3 จุดวิกฤตคือ 0, 1, 2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0, 1]$ เป็นฟังก์ชันลดบน $[1, 2]$

f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(1) = 1$

f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า f เป็นโค้งคว่ำบน $[0, 2]$

4.4 จุดวิกฤตคือ -1, 0, 1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[-1, 0]$ และ $[1, \infty)$

f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, -1]$ และ $[0, 1]$ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = f(1) = 0$

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = 1$ f เป็นโค้งคว่ำบน $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ f เป็นโค้งหงายบน

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ และ $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ จุดเปลี่ยนความเว้าคือ $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$ และ $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$

4.5 จุดวิกฤตคือ 0 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 0]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = 3$ f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

f เป็นโค้งคว่ำบน \mathbb{R} f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

4.6 จุดวิกฤตคือ 0, 1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[1, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $[0, 1]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1) = -2$ f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า f เป็นโค้งหงายบน $[0, \infty)$

4.7 f ไม่มีจุดวิกฤต f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\mathbb{R} - \{1\}$ f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

f เป็นโค้งคว่ำบน $(1, \infty)$ f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, 1)$ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

4.8 จุดวิกฤตคือ 2 และ -2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[2, \infty)$ และ $(-\infty, -2]$ f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty, -\sqrt{6}]$ และ $[2, \sqrt{6}]$ f เป็นโค้งหงายบน $[-\sqrt{6}, -2]$ และ $[\sqrt{6}, \infty)$ f มีจุดเปลี่ยนความเว้าคือ $(-\sqrt{6}, -2\sqrt{3})$ และ $(\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$

4.9 จุดวิกฤตคือ -1 f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty, -1]$ f เป็นโค้งหงายบน $[-1, \infty)$

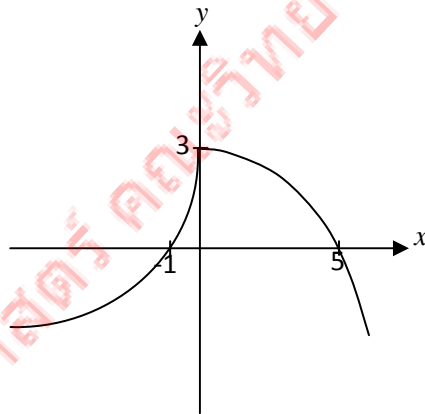
f มีจุดเปลี่ยนความเว้าคือ $(-1, 0)$

4.10 f มีจุดวิกฤตคือ $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[-\sqrt{3}, 0]$ และ $[\sqrt{3}, \infty)$

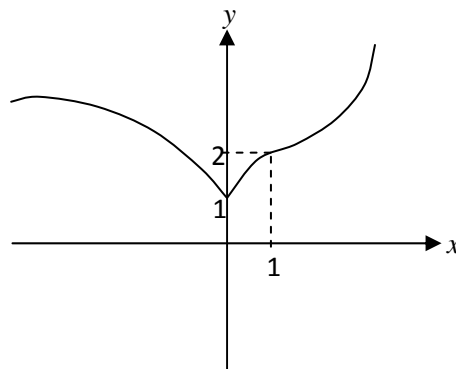
f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, -\sqrt{3}]$ และ $[0, \sqrt{3}]$ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = -9$

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = 0$ f เป็นโค้งคว่ำบน $[-1, 1]$ f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty, -1]$ และ $[1, \infty)$ f มีจุดเปลี่ยนความเว้าคือ $(1, -5)$ และ $(-1, -5)$

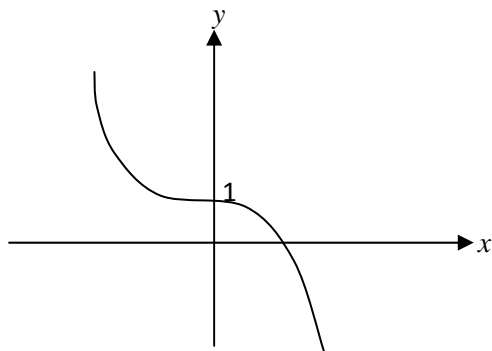
5) 5.1



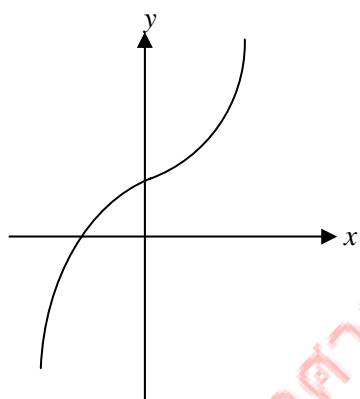
5.2



5.3



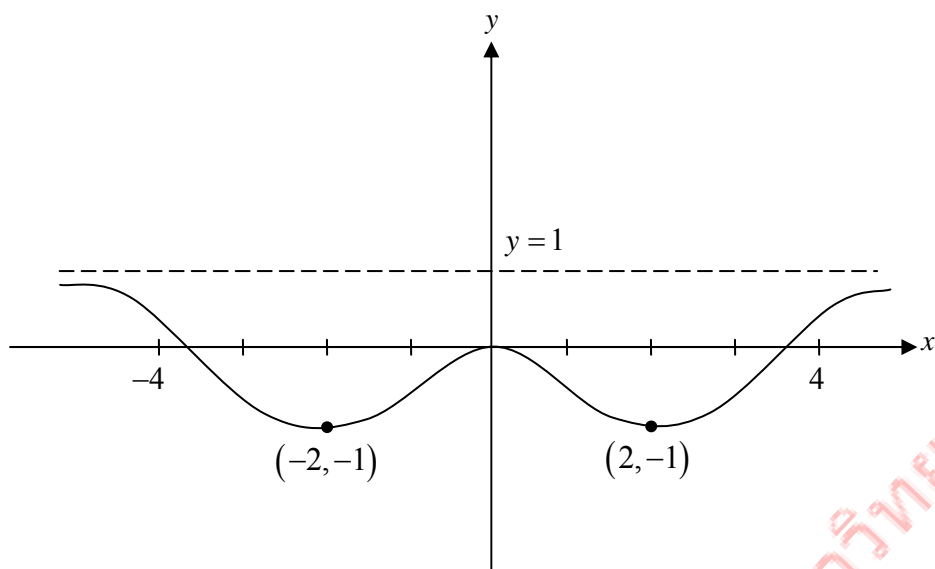
5.4



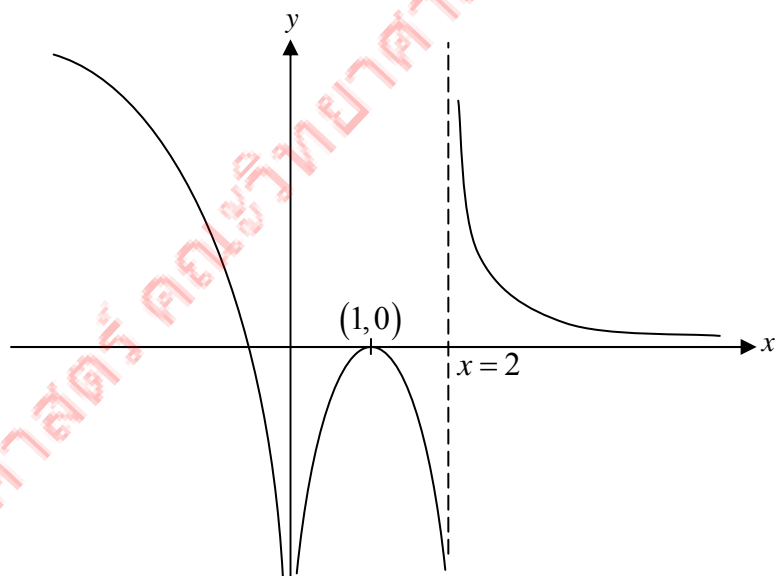
แบบฝึกหัด 3.5

- 1) 1.1 เส้นกำกับแนวอนคือ $y = 0$
- 1.2 เส้นกำกับแนวอนคือ $y = 3$
- 1.3 เส้นกำกับแนวอนคือ $y = -1$ และ $y = 1$
- 1.4 เส้นกำกับแนวอนคือ $y = \sqrt{7}$
- 2) 2.1 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = 4$
- 2.2 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = 2$ และ $x = -2$
- 2.3 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = -4$ และ $x = -1$
- 2.4 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = 2$ และ $x = 3$

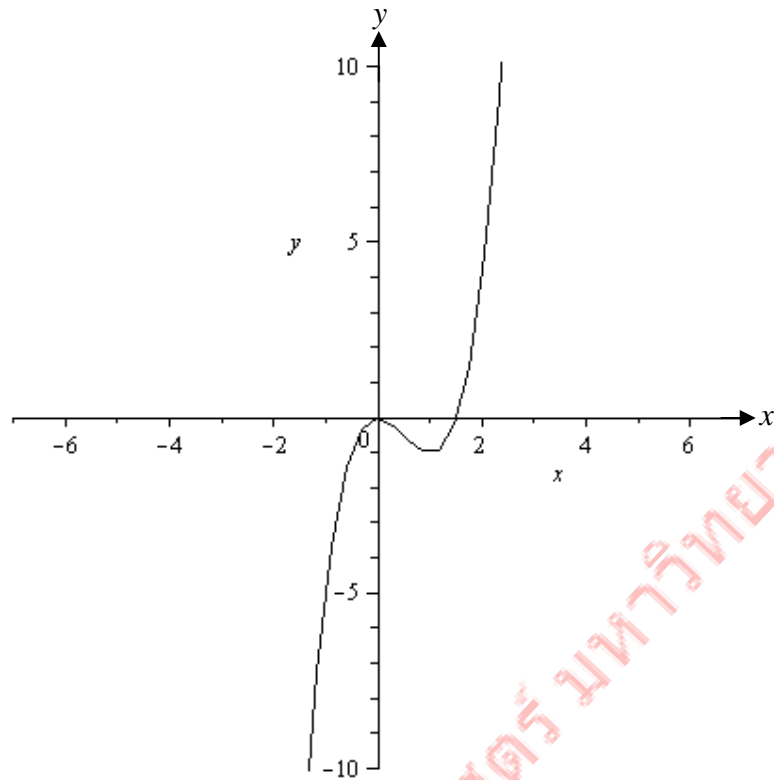
3) 3.1



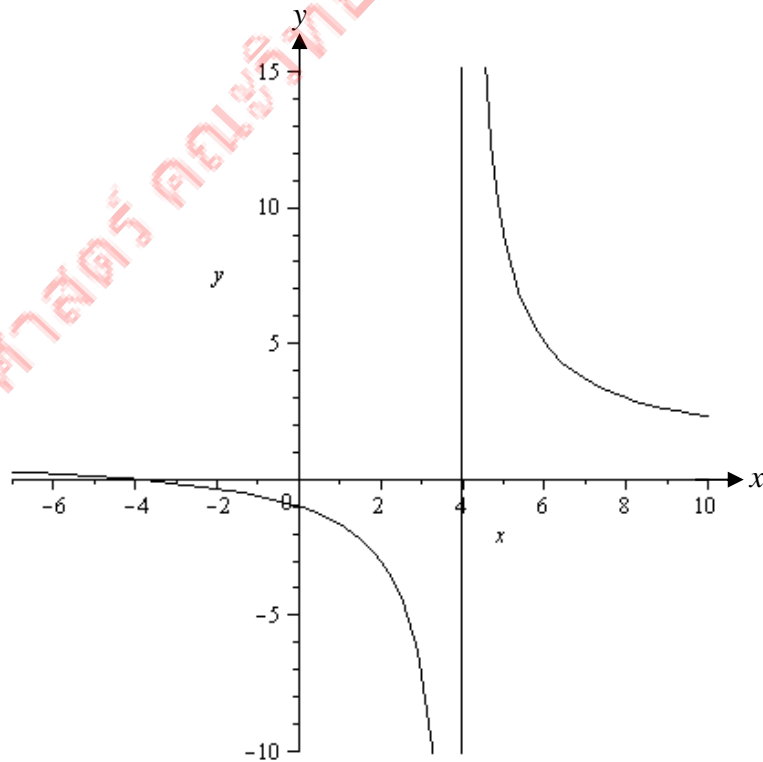
3.2



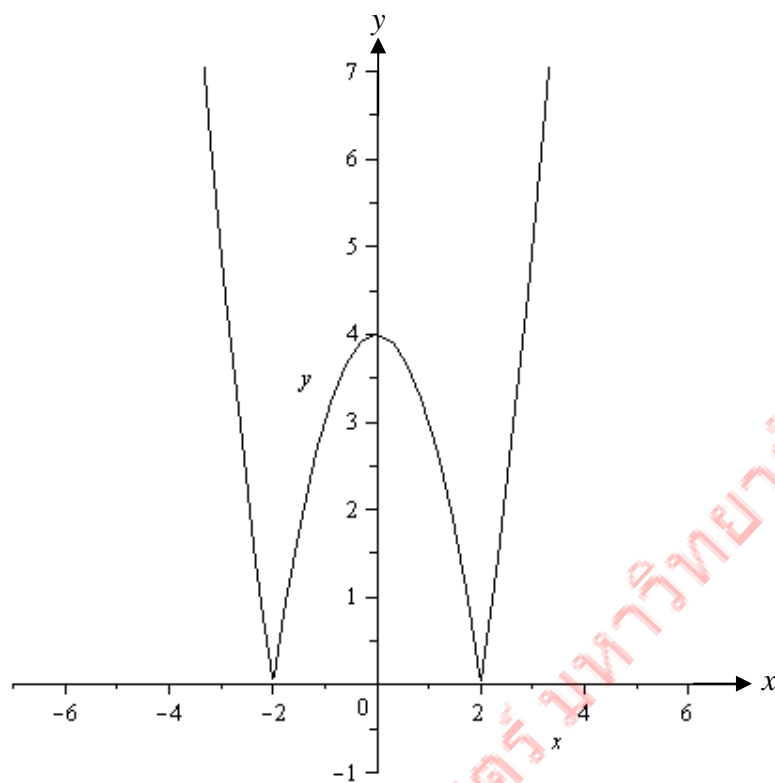
4) 4.1



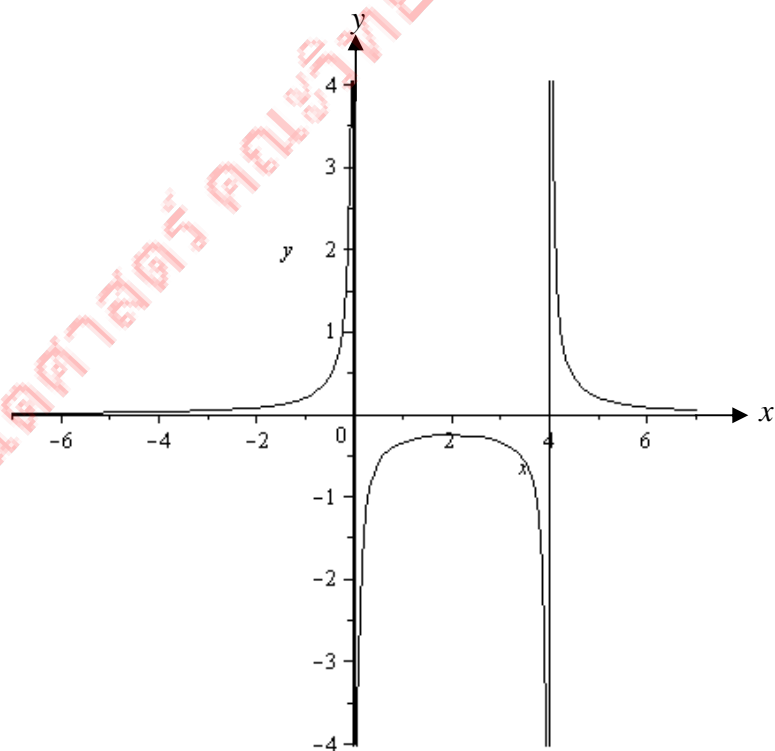
4.2



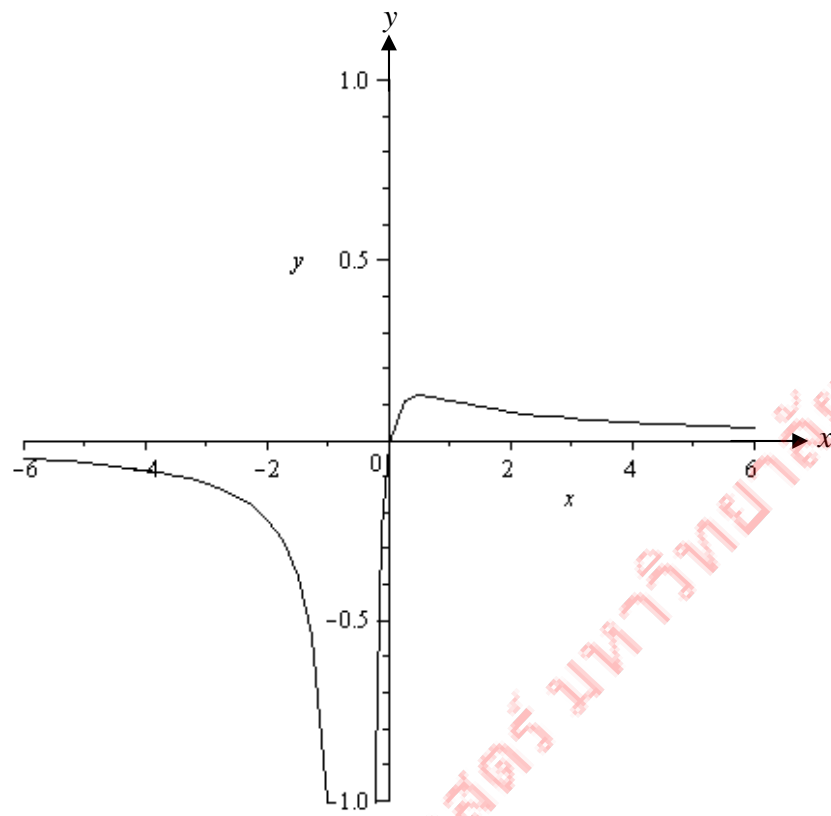
4.3



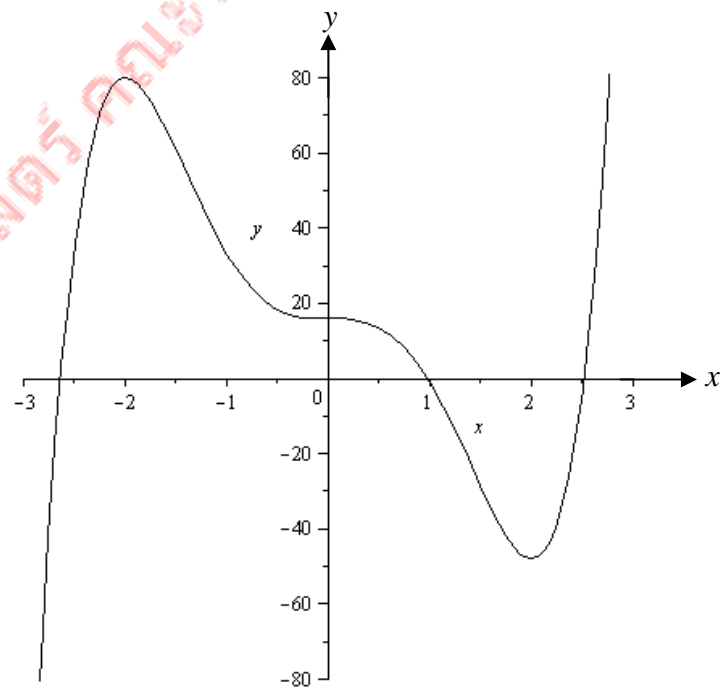
4.4



4.5



4.6



$$2.2 \quad \Delta y = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}, \quad dy = -\frac{\Delta x}{x^2}, \quad dy - \Delta y = \frac{-(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)}$$

$$2.3 \quad \Delta y = 0, \quad dy = 0, \quad dy - \Delta y = 0$$

$$2.4 \quad \Delta y = 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \quad dy = 3x^2\Delta x, \quad dy - \Delta y = -3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3$$

$$3) \quad 3.1 \quad \Delta y \approx 0.06$$

$$3.2 \quad \Delta y \approx 11.2$$

$$3.3 \quad \Delta y \approx 0.04$$

4) ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดในการคำนวณพื้นที่ด้านหนึ่งมีค่าประมาณ 0.96π นิ้ว²

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าประมาณ 0.015

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละของพื้นที่มีค่าประมาณ 1.5%

5) ค่าประมาณของปริมาตรที่เพิ่มขึ้นคือ 30 ลูกบาศก์นิ้ว

ปริมาตรที่เปลี่ยนไปที่แท้จริงเท่ากับ 30.301 ลูกบาศก์นิ้ว

6) ค่าประมาณของพื้นที่ผิวของบอลลูกบอลที่ลดลงคือ 0.32π ตารางฟุต

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์คือ 0.02

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละคือ 2%

7) ค่าประมาณของรัศมีที่เปลี่ยนไปคือ $\frac{0.2}{\pi}$ เซนติเมตร

8) ความหมายเชิงเรขาคณิตของ dA คือ ถ้าความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้นด้านละ Δs แล้ว พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้จะเพิ่มขึ้นโดยประมาณ $2s\Delta s$

ความหมายเชิงเรขาคณิตของ $\Delta A - dA$ คือ ถ้าความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้นด้านละ Δs แล้วค่าที่แท้จริงของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้จะมากกว่าค่าประมาณของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ประมาณ $(\Delta s)^2$ พื้นที่ของนี้จะเพิ่มขึ้นโดยประมาณ $2s\Delta s$

9) ต้องใช้ไม้ประมาณ 120 ตารางนิ้ว

10) ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละในการคำนวณพื้นที่สามเหลี่ยมนี้คือ 8%

$$11) \quad 11.1 \quad 1.0006 \times 10^{12}$$

$$11.2 \quad 4 + \frac{1}{48} \quad \text{หรือ} \quad 4.0208$$

11.3 0.92

11.4 $\frac{180 + \sqrt{3}\pi}{360}$ หรือ 0.51511

11.5 $\frac{90 + \sqrt{3}\pi}{180}$ หรือ 0.53023

11.6 3.12

12) 12.1 จะได้กำไรปีละประมาณ 150,000 บาท

12.2 จะได้กำไรปีละประมาณ 130,000 บาท

แบบฝึกหัด 3.8

1) 1.1 $-\frac{8}{3}$

1.2 $\frac{8}{3}$

1.3 -1

1.4 $-\frac{9}{4}$

2) ปริมาตรของลูกบาศก์ลูกนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 900 ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที

3) ความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งจะลดลงด้วยอัตรา $\frac{8}{\sqrt{2009}}$ เซนติเมตร/นาที่

4) พื้นที่ผิวของลูกโป่งลูกนี้จะลดลงด้วยอัตรา 0.75 ตารางเมตร/นาที่

5) ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตรา $\frac{1}{30}$ เมตร/นาที่

6) $-\frac{3}{2\sqrt{55}}$ เมตร/วินาที เมื่อฐานของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 3 เมตร

$-\frac{3}{2\sqrt{7}}$ เมตร/วินาที เมื่อฐานของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 6 เมตร

7) น้ำหนักของวัตถุนี้จะลดลงด้วยอัตรา 4.8171 ปอนด์/วินาที

8) ปริมาตรของวัตถุทรงกลมนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 512π ลูกบาศก์นิ้ว/วินาที

9) ปลายเงาของเด็กคนนี้จะเคลื่อนที่ออกห่างเสาไฟด้วยอัตรา $\frac{64}{11}$ ฟุต/วินาที

และความยาวของเงาจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{20}{11}$ ฟุต/วินาที

10) ความยาวของเงาของเด็กคนนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{3}{2}$ ฟุต/วินาที

11) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมป้านี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 120 ตารางเซนติเมตร/นาที่

12) ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมจะลดลงด้วยอัตรา $\frac{1}{5\sqrt{3}}$ ตารางเซนติเมตร/นาที่

บทที่ 4 กฏโลปีตาล

แบบฝึกหัด 4.1

1) $\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{3}{13}$

4) 0

5) $-\frac{1}{2}$

6) $-\frac{1}{2}$

7) $\frac{1}{6}$

8) $\frac{1}{2}$

9) $\frac{1}{3}$

10) $+\infty$

11) 0

12) 2

13) 0

14) 0

15) $\frac{2}{5}$

16) $+\infty$

17) $+\infty$

18) 0

19) 1

20) 2

แบบฝึกหัด 4.2

1) 1

2) 0

3) 0

4) 0

5) 0

6) $\frac{2}{\pi}$

7) 0

8) 0

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{2}$

11) 1

12) 1

13) 1

14) e

15) 1

16) e^5

17) 1

18) 1

19) 1

20) e^2

บทที่ 5 ลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 5.1

1) 1.1 e

1.2 0

1.3 0

1.4 0

1.5 1

1.6 0

1.7 0

1.8 5

1.9 0

1.10 0

2) 2.1 รั้วเข้า

2.2 รั้วเข้า

2.3 รั้วเข้า

2.4 รั้วเข้า

2.5 รั้วออก

2.6 รั้วออก

2.7 รั้วเข้า

2.8 รั้วเข้า

2.9 รั้วเข้า

2.10 รั้วเข้า

แบบฝึกหัด 5.2

1) 1.1 $\frac{3}{4}$

1.2 1

1.3 1

1.4 $\frac{16}{5}$

1.5 ∞

1.6 $\frac{3}{4}$

1.7 $\frac{25}{48}$

1.8 $\frac{1}{4}$

1.9	∞	1.10	$\frac{1}{4}$
1.11	1	1.12	∞
1.13	∞	1.14	∞
1.15	∞	1.16	∞
1.17	$\frac{e}{e-1}$	1.18	$\frac{17}{12}$
2) 2.1	ลู่เข้า	2.2	ลู่ออก
2.3	ลู่เข้า	2.4	ลู่ออก
2.5	ลู่เข้า	2.6	ลู่เข้า
2.7	ลู่เข้า	2.8	ลู่เข้า
2.9	ลู่เข้า	2.10	ลู่ออก
2.11	ลู่เข้า	2.12	ลู่เข้า
2.13	ลู่เข้า	2.14	ลู่เข้า
2.15	ลู่เข้า	2.16	ลู่เข้า
2.17	ลู่เข้า	2.18	ลู่ออก
2.19	ลู่ออก	2.20	ลู่เข้า
2.21	ลู่เข้า	2.22	ลู่ออก
2.23	ลู่เข้า	2.24	ลู่เข้า
2.25	ลู่ออก	2.26	ลู่เข้า
2.27	ลู่เข้า	2.28	ลู่เข้า
2.29	ลู่เข้า	2.30	ลู่เข้า
2.31	ลู่ออก	2.32	ลู่เข้า
2.33	ลู่เข้า	2.34	ลู่เข้า

2.35 ลู่เข้า

2.36 ลู่เข้า

2.37 ลู่เข้า

2.38 ลู่เข้า

3) 3.1 $x \in (-1, 1)$, ผลบวกคือ $\frac{1}{1-x}$

3.2 $x \in (-1, 1)$, ผลบวกคือ $\frac{x}{1-x^2}$

3.3 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, ผลบวกคือ $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

3.4 $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$, ผลบวกคือ $\frac{1}{1-\ln x}$

แบบฝึกหัด 5.3

1) 1.1 $[-1, 1)$

1.2 $[-1, 1]$

1.3 $(-\infty, \infty)$

1.4 $\{0\}$

1.5 $(-2, 2)$

1.6 $[-2, 2)$

1.7 $(-1, 1)$

1.8 $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

1.9 $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$

1.10 $(0, 2)$

2) 2.1 0

2.2 0

4) 4.1 $\ln(1-2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^n}{n} x^n$ สำหรับทุก ๆ $|x| < \frac{1}{2}$

4.2 $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

4.3 $\cosh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{(2n-1)!}$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

4.4. $\sinh(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

4.5 $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2(2n)!} x^{2n}$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

$$4.6 \quad \frac{1}{3-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} \quad \text{สำหรับทุกๆ } |x| < 3$$

$$4.7 \quad \frac{4x}{1+2x-3x^2} = -\frac{1}{3x+1} - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^{n+1}3^n + 1)x^n \quad \text{สำหรับทุกๆ } |x| < \frac{1}{3}$$

$$4.8 \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \quad \text{สำหรับทุกๆ } |x| < 1$$

$$5) \quad 5.1 \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2(2n)!} x^{2n}$$

$$5.2 \quad \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3!} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + \dots \right]$$

$$5.3 \quad e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \dots \right)$$

$$5.4 \quad x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$5.5 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$5.6 \quad \sqrt{2} + \frac{1}{2^{3/2}}(x-2) - \frac{1}{2^{7/2}} \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{2^{11/2}} \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots$$