ชุดฝึกหัด 6
การพิสูจน์ลิมิตเป็นจริง

1. จงแสดงว่า ข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

   1.1 ถ้า $0 < \delta < 1$ และ $|x-3| < \delta$ แล้ว $|x^2-9| < 7\delta$

   1.2 ถ้า $0 < \delta < 1$ และ $|x-4| < \delta$ แล้ว $|\sqrt{x}-2| < \frac{\delta}{\sqrt{3}+2}$

   1.3 ถ้า $0 < \delta < 1$ และ $|x-3| < \delta$ แล้ว $|x^2+5x-24| < 12\delta$

   1.4 ถ้า $0 < \delta < 1$ และ $|x-2| < \delta$ แล้ว $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{\delta}{2}$

2. จงหาค่า $\delta > 0$ ที่จะทำให้ข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

   2.1 ถ้า $0 < |x| < \delta$ แล้ว $|9x^2| < \frac{1}{100}$

   2.2 ถ้า $0 < |x| < \delta$ แล้ว $|x^3| < \frac{1}{1000}$

   2.3 ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|(2x+5)-11| < 30$

   2.4 ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|(2x+5)-11| < 1$

   2.5 ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|(2x+5)-11| < \frac{1}{10}$

   2.6 ถ้า $0 < |x-1| < \delta$ แล้ว $\left|\frac{3x+2}{2} - \frac{5}{2}\right| < 0.001$

3. จงหาจำนวนจริง $N > 0$ ที่จะทำให้ข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

   3.1 ถ้า $x > N$ แล้ว $5x > 2000$

   3.2 ถ้า $x > N$ แล้ว $x^2 > 100$

   3.3 ถ้า $x > N$ แล้ว $\left|\frac{2}{x}\right| < \frac{1}{100}$

   3.4 ถ้า $x > N$ แล้ว $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{10}$

4. จงเติมคำตอบในที่ว่างที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   ในการแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = -2$ เป็นจริง เราต้องตรวจสอบ เพื่อเลือก $\delta > 0$ ให้กับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดมาให้ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

   <u>ขั้นที่ 1</u> : สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ เราต้องการ $\delta > 0$ เพื่อให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง คือ

$$0 < |x-\text{.............}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\text{....................}| < \varepsilon$$

(4.1) (4.2)

ขั้นที่ 2 : เมื่อต้องการอสมการ (4.2) เราจึงนำนิพจน์ทางซ้ายของ (4.2) มาพิจารณาในรูปตัวประกอบดังนี้

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \varepsilon$$
(4.3)

ขั้นที่ 3 : ทดลองเลือก $\delta > 0$ เพื่อให้ได้อสมการ $k\left|x+\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ โดยที่ k เป็นจำนวนคงค่านั้น เราต้องทดลองโดยให้ $\delta \leq$ ....
(4.4)

ขั้นที่ 4 : เมื่อใช้ $\delta > 0$ ของ (4.4) เราจะได้จำนวนคงค่า k ของขั้นที่ 3 เท่ากับ ....
(4.5)

ขั้นที่ 5 : สรุปว่าการพิสูจน์เป็นจริงสำหรับกรณีนี้ เราจะเลือก $\delta \leq$ ....
(4.6)

5. จงเขียนการพิสูจน์ลิมิตเป็นจริง ที่สมบูรณ์ของข้อ 4

ในแต่ละข้อ 6–26
(ก) จงคำนวณค่าลิมิต
(ข) จงเขียนบทนิยาม ที่สอดคล้องกับลิมิตเป็นจริง
(ค) สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ หรือ $M > 0$ จงหาค่า $\delta > 0$ หรือ $N > 0$ ที่สอดคล้องกับบทนิยามที่ท่านเขียนไว้ใน (ข)
(ง) จงเขียนการพิสูจน์ที่สมบูรณ์

6. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1}$ (ทำข้อ ค สำหรับ $\varepsilon = 2$)

7. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{|x-1|}$ (ทำข้อ ค สำหรับ $M = 1$)

8. $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2-x-2}$

9. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-3}$

10. $\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+2}$

11. $\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x^2-5x+6)}{x^2-4}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{|2x-1|-1}{x}$

13. $\lim_{x\to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 1-1/x &, x \neq 1 \\ 1 &, x = 1 \end{cases}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} |x| & , x < 0 \\ x-1 & , x \geq 0 \end{cases}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x & , x \neq 1/2 \\ 2 & , x = 1/2 \end{cases}$

16. $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1}$

17. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$

18. $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3}$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x+1}$

20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x+3}$

21. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x-1}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x-5}{3x+2}$

23. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x}$

24. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6x-3}{2x+1}$

25. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

26. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2t^2+5t+3}{t+1}$

เฉลยชุดฝึกหัด 6

1. 1.1 กำหนดให้ $0 < \delta < 1$ และ $|x-3| < \delta$ ดังนั้น $|x-3| < \delta < 1$
ทำให้ได้ $-1 < x-3 < 1$ และได้ $5 < x+3 < 7$ นั่นคือได้ $|x+3| < 7$
เพราะฉะนั้น $|x^2-9| = |x-3||x+3| < 7\delta$

1.2 กำหนดให้ $0 < \delta < 1$ และ $|x-4| < \delta$ แล้ว $|x-4| < \delta < 1$ แต่
$|x-4| < 1 \Rightarrow -1 < x-4 < 1 \Rightarrow 3 < x < 5 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{3}$
$\Rightarrow \sqrt{x}+2 > \sqrt{3}+2 > 3 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} < \dfrac{1}{3}$
เพราะฉะนั้น $|\sqrt{x}-2| = \dfrac{|\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2|}{|\sqrt{x}+2|} = \dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \dfrac{\delta}{\sqrt{3}+2} < \dfrac{\delta}{3}$

1.3 กำหนดให้ $0 < \delta < 1$ และ $|x-3| < \delta$ ดังนั้น $|x-3| < \delta < 1$ แต่
$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 10 < x+8 < 12 \Rightarrow |x+8| < 12$
เพราะฉะนั้น $|x^2+5x-24| = |x+8||x-3| < 12\delta$

1.4 กำหนดให้ $0 < \delta < 1$ และ $|x-2| < \delta$ ดังนั้น $|x-2| < \delta < 1$ แต่
$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$
$\Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|x|} < 1$
เพราะฉะนั้น $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{2-x}{2x}\right| = \dfrac{|x-2|}{2|x|} < \dfrac{\delta}{2}$

2. 2.1 พิจารณา $|9x^2| < \dfrac{1}{100}$ เพราะว่า
$|9x^2| < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 9|x|^2 < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow |x|^2 < \dfrac{1}{(30)^2} \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{30}$
เราจึงให้ $\delta \leqslant \dfrac{1}{30}$ แล้ว
$0 < |x| < \delta \leqslant \dfrac{1}{30} \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{30} \Rightarrow |9x^2| < \dfrac{1}{100}$

2.2 พิจารณา $|x^3| < \dfrac{1}{1000}$ เราได้ว่า
$|x^3| < \dfrac{1}{1000} \Leftrightarrow |x|^3 < (\dfrac{1}{10})^3 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{10}$
เราจึงให้ $\delta \leqslant \dfrac{1}{10}$ แล้วจะได้
$0 < |x| < \delta \leqslant \dfrac{1}{10} \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{10} \Rightarrow |x|^3 < \dfrac{1}{1000}$

2.3 พิจารณา $|(2x+5)-11| < 30$ เราได้ว่า

$$|(2x+5)-11| < 30 \Leftrightarrow |2x-6| < 30 \Leftrightarrow 2|x-3| < 30$$

$$\Leftrightarrow |x-3| < \frac{30}{2} = 15$$

เราจึงให้ $\delta \leq 15$ แล้วจะได้ว่า

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 0 < |x-3| < 15 \Rightarrow 2|x-3| < 30$$

$$\Rightarrow |(2x+5)-11| < 30$$

2.4 แทนที่ "30" ในข้อ 2.3 ด้วย 1 เราจะได้ว่า ต้องให้ $\delta \leqslant \frac{1}{2}$

2.5 แทนที่ "30" ในข้อ 2.3 ด้วย $\frac{1}{10}$ เราจะได้ว่า ต้องให้ $\delta \leqslant \frac{1}{20}$

2.6 พิจารณา $\left|\frac{3x+2}{2} - \frac{5}{2}\right| < 0.001$ เราจะได้ว่า

$$\left|\frac{3x+2}{2} - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{3x+2-5}{2}\right| = \left|\frac{3x-3}{2}\right| = \frac{3}{2}|x-1| < 0.001 \Leftrightarrow |x-1| < \frac{0.002}{3}$$

เราจึงให้ $\delta \leqslant \frac{2}{3000}$ แล้วจะได้

$$0 < |x-1| < \frac{2}{3000} \Rightarrow \frac{3}{2}|x-1| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \left|\frac{3x+2}{2} - \frac{5}{2}\right| < 0.001$$

3. 3.1 พิจารณา $5x > 2000$ ทำให้ได้

$$5x > 2000 \Leftrightarrow x > \frac{2000}{5} \Leftrightarrow x > 400$$

เราจึงให้ $N \geq 400$ แล้วจะได้

$$x > N \geq 400 \Rightarrow x > 400 \Rightarrow x > \frac{2000}{5} \Rightarrow 5x > 2000$$

3.2 พิจารณา $x^2 > 100$ ทำให้ได้

$$x^2 > 100 \Leftrightarrow x^2 > (10)^2 \Leftrightarrow |x| > 10$$

เราจึงเลือก $N \geq 10$ แล้วจะได้

$$x > N \geq 10 > 0 \Rightarrow x = |x| > 10 \Rightarrow x^2 > 10^2 \Rightarrow x^2 > 100$$

3.3 $\left|\frac{2}{x}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{200} \Leftrightarrow |x| > 200$

ถ้าให้ $N \geq 200$ แล้วจะได้

$$x > N \geq 200 \Rightarrow x > 200 > 0 \Rightarrow |x| = x > 200$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{200} \Rightarrow \frac{2}{|x|} < \frac{1}{100}$$

3.4 $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{10} \iff \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10} \iff |x| > 10$

ถ้าให้ $N \geq 10$ เราจะได้

$x > N \geq 10 \Rightarrow x > 10 > 0 \Rightarrow |x| = x > 10$

$\Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10}$

4. 4.1 $\frac{-1}{2}$, 4.2 $\frac{1}{x} - (-2)$,

4.3 $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| = \left|\frac{1}{x} + 2\right| = \left|\frac{1+2x}{x}\right| = \frac{2\left|\frac{1}{2} + x\right|}{|x|} < \varepsilon$,

4.4 $\frac{1}{4}$, 4.5 8 4.6 $\delta \leqslant \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$

5. 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \leqslant \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$

3. $0 < \left|x + \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ และ $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{8}$

4. $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{4} < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-3}{4} < x < \frac{-1}{4}$

$\Rightarrow |x| > \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \frac{1}{|x|} < 4$

5. $0 < \left|x + \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - (-2)\right| = \frac{2|x + 1/2|}{|x|} < (2\delta)(4) = 8\delta < 8(\frac{\varepsilon}{8}) = \varepsilon$

6. (ก) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x-1} = -1$

(ข) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x-1} + 1\right| < \varepsilon)$

(ค) ต้องการหา $\delta > 0$ เพื่อทำให้ข้อความ " $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x-1} + 1\right| < 2$ " เป็นจริง จึงเป็นคำถามเดียวกันกับ ข้อ 2

<u>วิธีคิด</u> : $\left|\frac{1}{x-1} + 1\right| < 2 \iff \left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{|x|}{|x-1|} < 2$

เราจะเลือก δ–ค่าทดลองเป็น $\frac{1}{2}$ นั่นคือ $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ จะได้

$|x| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3}{2} < x-1 < \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow |x-1| > \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \frac{1}{|x-1|} < 2$

แต่ $\frac{|x|}{|x-1|} = |x| \frac{1}{|x-1|} < 2 \quad \Leftarrow |x| < 1$ และ $\frac{1}{|x-1|} < 2$

เราจึงเลือก $\delta \leq 1$ และ $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ นั่นคือเลือก $\delta \leqslant \frac{1}{2}$

(ง) สำหรับ $\varepsilon = 2$ เราจะเลือก $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ แล้วจะได้

$0 < |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow |x| < 1$ และ $\frac{1}{|x-1|} < 2$ (จากวิธีคิด)

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x-1}+1\right| = \frac{|x|}{|x-1|} = |x|.\frac{1}{|x-1|} < (1)(2) = 2$$

7. (ก) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}$ $(x\to 1^- \Rightarrow x < 1) = +\infty$

(ข) $(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(1-\delta < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|} > M)$

(ค) เราต้องการหา $\delta > 0$ เพื่อให้ได้ความ " $1-\delta < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|} > M$ " เป็นจริง

<u>วิธีคิดหา δ</u> : พิจารณา $x < 1$ ดังนั้น $\frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{1-x}$ ทำให้ได้

$\frac{1}{1-x} > M > 0 \Leftrightarrow 1-x < \frac{1}{M} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{M} < x$

เพราะฉะนั้น $1-\frac{1}{M} < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{|x-1|} > M$

เราจึงเลือก $\delta \leq \frac{1}{M}$

(ง) สำหรับ $M = 1$ เราเลือก $\delta \leq 1$ แล้วจะได้

$0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{1-x} > 1$

(แทนที่ "M" ใน "วิธีคิดใน (ค)" ด้วย "1")

8. (ก) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^2-x-2} = \frac{2}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x-2)} = \frac{2}{-2} = -1$

(ข) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2}{x^2-x-2}+1\right| < \varepsilon)$

(ค) เราต้องการหา $\delta > 0$ ที่จะทำให้ข้อความ

"$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2}{x^2-x-2}+1\right| < \varepsilon$" เป็นจริง

<u>วิธีคิด</u> : เพราะว่า $\left|\frac{2}{x^2 - x - 2} + 1\right| = \left|\frac{2+x^2 - x-2}{(x-2)(x+1)}\right| = \left|\frac{x(x-1)}{(x-2)(x+1)}\right| = \frac{|x|\,|x-1|}{|x-2|\,|x+1|}$

เราจะเลือก δ–ค่าทดลองเป็น $\frac{1}{2}$ นั่นคือให้ $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ จะได้

$|x| < \delta \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x-1 < -\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2} < x-2 < -\frac{3}{2}$ และ $\frac{1}{2} < x+1 < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{3}{2}$, $|x-2| > \frac{3}{2}$ และ $|x+1| > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{3}{2}$, $\frac{1}{|x-2|} < \frac{2}{3}$ และ $\frac{1}{|x+1|} < 2$

$\Rightarrow \frac{|x||x-1|}{|x-2||x+1|} < (\frac{3}{2})(\frac{2}{3})(2)(\delta) = 2\delta$

แต่ $2\delta \leq \varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ $\delta \leq \varepsilon/2$ เราจึงเลือก $\delta \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ $\therefore \delta \leq 1/2$ และ $\delta \leq \varepsilon/2$

3. $0 < |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow |x-1| < \frac{3}{2}$, $|x-2| > \frac{3}{2}$ และ $|x+1| > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{|x|\,|x-1|}{|x-2||x+1|} < 2\delta$ (จากวิธีคิด)

4. $\therefore 0 < |x| < \delta \Rightarrow |x| < \frac{1}{2}$ และ $\delta \leq \varepsilon/2$

$\Rightarrow \left|\frac{2}{x^2 - x - 2} + 1\right| = \frac{|x||x-1|}{|x-2||x+1|} < 2\delta \leq \varepsilon$

9. (ก) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{\lim_{x\to 2}(x-3)} = \frac{1}{2-3} = -1$

(ข) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x-3} + 1\right| < \varepsilon)$

(ค) เราต้องการหา $\delta \geq 0$ ที่จะให้ได้ข้อความ

" $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x-3} + 1\right| < \varepsilon$ " เป็นจริง

<u>วิธีคิด</u> : เพราะว่า $\left|\frac{1}{x-3}+1\right| = \left|\frac{1+x-3}{x-3}\right| = \left|\frac{x-2}{x-3}\right| = \frac{|x-2|}{|x-3|}$

เราจึงเลือก δ–ค่าทดลองเป็น 1/2 นั่นคือสมมติว่า $\delta \le 1/2$ แล้วจะได้

$$|x-2| < \delta \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x-3 < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |x-3| > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} < 2 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|x-3|} < 2\delta$$

แต่ $2\delta \le \varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ $\delta \le \varepsilon/2$ เราจึงเลือก $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$

(ง) 1. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

2. เลือก $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ เพราะฉะนั้น $\delta \le 1/2$ และ $\delta \le \varepsilon/2$

3. $0 < |x-2| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} < 2 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|x-3|} < 2\delta$ (จากวิธีคิด)

4. $\therefore\ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{2}$ และ $\delta \le \varepsilon/2$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x-3}+1\right| = \frac{|x-2|}{|x-3|} < 2\delta \le 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

10. (ก) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-1}(x+2)} = \frac{1}{-1+2} = 1$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\left(0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2}-1\right| < \varepsilon\right)$

(ค) เราต้องการหา $\delta \ge 0$ ที่ทำให้ได้ข้อความ

" $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2}-1\right| < \varepsilon$ " เป็นจริง

<u>วิธีคิด</u> : เพราะว่า $\left|\frac{1}{x+2}-1\right| = \left|\frac{1-x-2}{x+2}\right| = \left|\frac{-(x+1)}{x+2}\right| = \frac{|x+1|}{|x+2|}$

เราจึงเลือก δ–ค่าทดลองเป็น 1/2 นั่นคือสมมติว่า $\delta \le 1/2$ จะได้ว่า

$$|x+1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x+2 < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |x+2| > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x+2|} < 2 \Rightarrow \frac{|x+1|}{|x+2|} < 2\delta$$

แต่ $2\delta \le \varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ $\delta \le \varepsilon/2$ เราจึงเลือก $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$

(ง) 1. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

2. เลือก $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ เพราะฉะนั้น $\delta \le 1/2$ และ $\delta \le \varepsilon/2$

3. $0 < |x+1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x+2|} < 2$ (จากวิธีคิด)

4. $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \frac{|x+1|}{|x+2|} < 2\delta \le 2(\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$

11. (ก) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2-5x+6)}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}(x-3) = -1$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x-3)+1| < \varepsilon)$

(ค) เราต้องการหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ข้อความ

" $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x-3)+1| = |x-2| < \varepsilon$ "

เป็นจริง เราจึงเลือก $\delta \le \varepsilon$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \varepsilon$

3. $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x-3)+1| = |x-2| < \delta \le \varepsilon$

12. (ก) พิจารณา $x \in (\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$ จะได้ $x < \frac{1}{2}$ ทำให้ได้

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|2x-1| - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-2x-1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-2) = -2$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x| < \delta \Rightarrow |(-2)+2| < \varepsilon)$

(ค) เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ เราจึงเลือก δ เป็นเท่าใดก็ได้ก็จะได้ $\varepsilon > 0$

(ง) 1. กำหนด $\varepsilon > 0$

2. เลือก $\delta = 1$

3. $0 < |x| < \delta = 1 \Rightarrow |(-2)+2| = 0 < \varepsilon$

13. (ก) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(1-\frac{1}{x}) = 0$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|1-\frac{1}{x}\right| < \varepsilon)$

(ค) เนื่องจาก $\left|1-\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{|x-1|}{|x|}$ เราจึงเลือก δ–ค่าทดลองเป็น 1/2 ทำให้ได้

$$0 < |x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |x| > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < 2 \Rightarrow \frac{|x-1|}{|x|} < 2\delta$$

แต่ $2\delta \le \varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ $\delta \le \varepsilon/2$ เราจึงเลือก $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$

(ง) 1. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

2. เลือก $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ เพราะฉะนั้น $\delta \le 1/2$ และ $\delta \le \varepsilon/2$

3. $0 < |x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < 2$ (จากวิธีคิด)

4. $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|1-\frac{1}{x}\right| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2\delta \le 2(\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$

14. (ก) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$, และ

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

อย่างไรก็ตามเราจะแสดงว่า ลิมิตซ้าย $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ เป็นจริง และลิมิตขวา $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$ เป็นจริง

(ข) $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(-\delta < x < 0 \Rightarrow |x| < \varepsilon)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = -1 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < x < \delta \Rightarrow |(x-1)+1| < \varepsilon)$

(ค) ไม่ว่ากรณีใด ถ้าเราเลือก $\delta \leqslant \varepsilon$ จะทำให้ได้

$-\delta < x < 0 \Rightarrow |x| < \delta \le \varepsilon$ และ $0 < x < \delta \Rightarrow |(x-1)+1| = |x| < \varepsilon$

15. (ก) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$ (พิจารณาเฉพาะ $x \in (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$)

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \varepsilon)$

(ค) เลือก $\delta \le \varepsilon$

(ง) 1. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

2. เลือก $\delta \le \varepsilon$

3. $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \delta \le \varepsilon$

16. (ก) $\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$

[เมื่อ $x \to -1^+$ ตัวเศษมีค่าเข้าใกล้ -1 ในขณะที่ตัวส่วนเป็นจำนวนบวก มีขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ ทำให้อัตราส่วนเป็นจำนวนลบมีค่าน้อยลง ๆ อย่างไม่มีขอบเขตจำกัด]

(ข) $(\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(-1 < x < -1+\delta \Rightarrow \frac{x}{x+1} < -M$

(ค) เพราะว่า $\frac{x}{x+1} = 1-\frac{1}{x+1}$ ทำให้ได้

$1 - \frac{1}{x+1} < -M \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > M+1 > 0 \Leftrightarrow x+1 < \frac{1}{M+1}$

$\Leftrightarrow x < -1+\frac{1}{M+1}$

เราจึงเลือก $\delta \leqslant \frac{1}{M+1}$

(ง) 1. กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \leqslant \frac{1}{M+1}$

3. $-1 < x < -1 + \frac{1}{M+1} \Rightarrow 0 < x+1 < \frac{1}{M+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} > M+1$

$\Rightarrow -\frac{1}{x+1} < -1-M \Rightarrow 1 - \frac{1}{x+1} < -M$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} < -M$

17. (ก) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$

(ข) $(\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(2 < x < 2+\delta \Rightarrow \frac{x}{x-2} > M)$

(ค) เพราะว่า $\frac{x}{x-2} = 1+\frac{2}{x-2}$ และ $1+\frac{2}{x-2} > M \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} > M-1$

ถ้า $M > 1$ และ $\frac{2}{x-2} > M > M-1 > 0$ จะได้ $x-2 < \frac{2}{M} < \frac{2}{M-1}$

และดังนั้น $x < 2 + \frac{2}{M}$ เราจึงเลือก $\delta \le \frac{2}{M}$

(ง) 1. กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \frac{2}{M}$

3. $2 < x < 2+\delta \Rightarrow 2 < x < 2 + \frac{2}{M} \Rightarrow 0 < x - 2 < \frac{2}{M} < \frac{2}{M-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{x-2} > \frac{M}{2} > \frac{M-1}{2} \Rightarrow \frac{2}{x-2} > M-1$

$\Rightarrow \frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2} > M$

18. (ก) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

(ข) $(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(3-\delta < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{x-3} < -M)$

(ค) เพราะว่า $\frac{1}{x-3} < -M < 0 \Leftrightarrow 0 > x-3 > \frac{-1}{M} \Leftrightarrow 3 > x > 3 - \frac{1}{M}$

เราจึงเลือก $\delta \le \frac{1}{M}$

(ง) 1. ให้ M เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \frac{1}{M}$

3. $3-\delta < x < 3 \Rightarrow 3 - \frac{1}{M} < x < 3 \Rightarrow -\frac{1}{M} < x-3 < 0$

$\Rightarrow -M > \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} < -M$

19. (ก) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{1-1/x}{1+1/x}) = 1$

(ข) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(x > N \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| < \varepsilon)$

(ค) เพราะว่า $0 < \left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{x-1-x-1}{x+1}\right| = \left|\frac{-2}{x+1}\right| = \frac{2}{|x+1|} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x+1| > \frac{2}{\varepsilon} \Leftarrow x+1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} - 1$

แต่ $x > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ เราจึงเลือก $N \ge \frac{2}{\varepsilon}$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $N \ge \frac{2}{\varepsilon}$

3. $x > N \geq \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow x+1 > \frac{2}{\varepsilon} > 0$

$\Rightarrow |x+1| > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2}{|x+1|} < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| = \frac{2}{|x+1|} < \varepsilon$

20. (ก) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+3} = 0$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)(x > N \Rightarrow \left|\frac{1}{x+3}\right| < \varepsilon)$

(ค) เพราะว่า $\left|\frac{1}{x+3}\right| = \frac{1}{|x+3|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x+3| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow x+3 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 3$

แต่ $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 3$ เราจึงเลือก $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$

(ง) 1. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

2. เลือก $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$

3. $x > N \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 3 \Rightarrow x+3 > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow |x+3| > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \frac{1}{|x+3|} < \varepsilon$

21. (ก) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x/x}{(x-1)/x} = \lim_{x\to-\infty} = \frac{5}{1-1/x} = 5$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)(x < -N \Rightarrow \left|\frac{5x}{x-1} - 5\right| < \varepsilon)$

(ค) เพราะว่า $\left|\frac{5x}{x-1} - 5\right| = \left|\frac{5x-5x+5}{x-1}\right| = \frac{5}{|x-1|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| > \frac{5}{\varepsilon} > 0$

$\Leftarrow x-1 < -\frac{5}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{\varepsilon} + 1$

แต่ $x < -\frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\frac{5}{\varepsilon}+1$ เราจึงเลือก $N \geq \frac{5}{\varepsilon}$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $N \geq \frac{5}{\varepsilon}$

3. $x < -N \leq -\frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\frac{5}{\varepsilon}+1 \Rightarrow x-1 < -\frac{5}{\varepsilon}$

$\Rightarrow |x-1| > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{5}{|x-1|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{5x}{x-1}-5\right| < \varepsilon$

22. (ก) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x-5}{3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4-5/x}{3+2/x} = \frac{4}{3}$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)(x > N \Rightarrow \left|\frac{4x-5}{3x+2}-\frac{4}{3}\right| < \varepsilon)$

(ค) เพราะว่า $\left|\frac{4x-5}{3x+2}-\frac{4}{3}\right| = \left|\frac{12x-15-12x-8}{3(3x+2)}\right| = \frac{23}{3|3x+2|} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |3x+2| > \frac{23}{3\varepsilon} \Leftarrow 3x+2 > \frac{23}{3\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}(\frac{23}{3\varepsilon}-2)$

แต่ $x > \frac{23}{9\varepsilon} = \frac{23}{3(3\varepsilon)} \Rightarrow x > \frac{1}{3}(\frac{23}{3\varepsilon}-2)$ เราจึงเลือก $N \geq \frac{23}{9\varepsilon}$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $N \geq \frac{23}{9\varepsilon}$

3. $x > N \geq \frac{23}{9\varepsilon} = \frac{1}{3}(\frac{23}{3\varepsilon}) \Rightarrow x > \frac{1}{3}(\frac{23}{3\varepsilon})-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}(\frac{23}{3\varepsilon}-2)$

$\Rightarrow 3x+2 > \frac{23}{3\varepsilon} \Rightarrow |3x+2| > \frac{23}{3\varepsilon} \Rightarrow \frac{23}{3|3x+2|} < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{4x-5}{3x-2} - \frac{4}{3}\right| = \frac{23}{3|3x+2|} < \varepsilon$

23. (ก) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)^3}{x(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} = 0$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \dfrac{|x-1|^2}{|x||x+1|} < \varepsilon)$

(ค) เลือก δ–ค่าทดลองเป็น 1/2 นั่นคือสมมติให้ $\delta \le 1/2$ แต่

$$0 < |x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{3}{2} < x+1 < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow |x| > \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad |x+1| > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|} < 2 \quad \text{และ} \quad \frac{1}{|x+1|} < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x||x+1|} < \frac{4}{3}$$

เพราะฉะนั้น $0 < |x-1| < \delta$ และ $0 < |x-1| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{|x-1|^2}{|x||x+1|} < \dfrac{4\delta^2}{3}$

แต่ $\dfrac{4\delta^2}{3} \le \varepsilon \Leftrightarrow \delta \le \dfrac{\sqrt{3\varepsilon}}{2}$ เราจึงเลือก $\delta \le \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3\varepsilon}}{2}\right\}$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \le \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3\varepsilon}}{2}\right\}$ เพราะฉะนั้น $\delta \le \dfrac{1}{2}$ และ $\delta \le \dfrac{\sqrt{3\varepsilon}}{2}$

3. $0 < |x-1| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|x|} < 2$ และ $\dfrac{1}{|x+1|} < \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x||x+1|} < \dfrac{4}{3}$ (จากวิธีคิดใน (ค))

4. $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow 0 < |x-1| < \dfrac{1}{2}$ และ $0 < |x-1| < \dfrac{\sqrt{3\varepsilon}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{|x-1|^2}{|x||x+1|} < \dfrac{4\delta^2}{3} \le \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3\varepsilon}}{2}\right)^2 = \varepsilon$

24. (ก) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x-3}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6-3/x}{2+1/x} = \dfrac{6}{2} = 3$

(ข) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)(x < -N \Rightarrow \left|\dfrac{6x-3}{2x+1} - 3\right| < \varepsilon)$

(ค) เพราะว่า $\left|\dfrac{6x-3}{2x+1} - 3\right| = \left|\dfrac{6x-3-6x-3}{2x+1}\right| = \dfrac{6}{|2x+1|} < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |2x+1| > \frac{6}{\varepsilon} \Leftarrow 2x+1 < -\frac{6}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}\left(\frac{6}{\varepsilon}+1\right)$$

เราจึงเลือก $N \geq \frac{1}{2}(\frac{6}{\varepsilon}+1)$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $N \geq \frac{1}{2}(\frac{6}{\varepsilon}+1)$

3. $x < -N \leq -\frac{1}{2}(\frac{6}{\varepsilon}+1) \Rightarrow 2x < -\frac{6}{\varepsilon} -1 \Rightarrow 2x+1 < -\frac{6}{\varepsilon}$

$\Rightarrow |2x+1| > \frac{6}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{6}{|2x+1|} < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{6x-3}{2x+1} - 3\right| < \varepsilon$

25. (ก) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$

(ข) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\right| < \varepsilon)$

(ค) เพราะว่า $\left|\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4+x-2}{4(x-2)}\right| = \frac{|x+2|}{4|x-2|}$

เราจึงเลือก δ–ค่าทดลองเป็น 1 นั่นคือสมมติให้ $\delta \leq 1$ แต่

$0 < |x+2| < 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -5 < x-2 < -3$

$\Rightarrow |x-2| > 3 \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น $0 < |x+2| < \delta$ และ $0 < |x+2| < 1 \Rightarrow \frac{|x+2|}{4|x-2|} < \frac{\delta}{12}$

และ $\frac{\delta}{12} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta \leq 12\varepsilon$ เราจึงเลือก $\delta \leq \min\{1, 12\varepsilon\}$

(ง) 1. กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $\delta \leq \min\{1, 12\varepsilon\}$

3. $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow 0 < |x+2| < 1$ และ $0 < |x+2| < 12\varepsilon$

4. $0 < |x+2| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{3}$ (จาก (ค))

5.∴ $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\right| = \frac{|x+2|}{4|x-2|} < \frac{\delta}{12} \leq \frac{1}{12}(12\varepsilon) = \varepsilon$

26. (ก) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2t^2+5t+3}{t+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2t+3)(t+1)}{t+1} = \lim_{x\to-\infty} (2t+3) = -\infty$

(ข) $(\forall M > 0)(\exists N > 0)(t < -N \Rightarrow 2t+3 < -M)$

(ค) $2t+3 < -M \Leftrightarrow 2t < -M-3 \Leftrightarrow t < -\frac{1}{2}(M+3)$

เราจึงเลือก $N \geqslant \frac{M+3}{2}$

(ง) 1. กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก

2. เลือก $N \geqslant \frac{M+3}{2}$

3. $t < -N \leq -\frac{M+3}{2} \Rightarrow 2t < -M-3 \Rightarrow 2t+3 < -M$