ชุดฝึกหัด 5
การคำนวณค่าลิมิตทั่วไป

จงพิจารณาว่าลิมิตในข้อ 1–64 หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จงคำนวณค่าลิมิตนั้น

1. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+16}$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$

3. $\lim_{x\to 6} (\sqrt{6x} + 3x - \frac{1}{x})(x^2-4)$

4. $\lim_{x\to 7} (x+\sqrt{x-6})(x^2-2x+1)$

5. $\lim_{x\to 10} (2x^2-15x-50)^{20}$

6. $\lim_{x\to 2} \frac{-2x^2+4x}{x-2}$

7. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+64}{x-8}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{x(x^2+3x+5)}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{-2}{\sqrt{x+16}+7}$

10. $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-8x+16}$

11. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x+5}$

12. $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x+1}$

13. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^3-3x^2-x+3}$

14. $\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{[1/(x+4) - 1/4]}{x}$

17. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

19. $\lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}$

20. $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

21. $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}$

22. $\lim_{x\to 1} (\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x})$

23. $\lim_{x\to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ x^3 & , x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

24. $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & , x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2 & , x \geq 2 \end{cases}$

25. $\lim_{x\to 3} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & , x \le 3 \\ \dfrac{12-2x}{3} & , x > 3 \end{cases}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

27. $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

28. $\lim_{x\to -1} \dfrac{|x|-1}{x^2-1}$

29. $\lim_{x\to 1} |2x-3|$

30. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1-|2x-3|}{x-2}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|-x}{x}$

32. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{|x|+1}$

33. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{|x^2-3x+2|}{1-x}$

34. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

35. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

36. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^3-1}$

37. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

38. $\lim_{x\to 0^-} \sin x$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{3x}$

40. $\lim_{\theta\to\infty} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

41. $\lim_{\theta\to\infty} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

42. $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

43. $\lim_{x\to\infty} x \sin\dfrac{5}{x}$

44. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

45. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^9+6x+3}{x^{10}-x-1}$

46. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+x^2+1}{3x^2+4}$

47. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-100x+3}{5x^4+7x-1}$

48. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+2}$

49. $\lim_{y\to-\infty} \dfrac{2-y^2}{\sqrt{y^4+1}}$

50. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+1}}$

51. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+1)^{100}}{(2x+50)^{100}}$

52. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$

53. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{|x| - 1}{x+1}$

54. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sec^2 ax-1}{x^2}$, $a \neq 0$

55. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin \dfrac{1}{x}$

56. $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin 3t}{6t}$

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$

58. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2-2x+3})$

59. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2-6x})$

60. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+5x} - \sqrt{4x^2+x})$

61. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{bx^2+ax} - \sqrt{bx^2-ax})$

62. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2(x^2-1)} - x^2)$

63. $\lim\limits_{x\to2} (\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4})$

64. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})$

65. กำหนดให้ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{3}{2}$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dfrac{1}{2}$ จงหา

65.1 $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$

65.2 $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x))$

65.3 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

66. จงนิยามฟังก์ชัน f และ g เพื่อให้สอดคล้องกับทุกเงื่อนไข ในแต่ละข้อต่อไปนี้ (คำตอบในแต่ละข้อมีได้มากกว่า 1 คำตอบ)

66.1 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 5$

66.2 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = 20$

66.3 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$

66.4 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 3$

66.5 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \infty$

66.6 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

เฉลยชุดฝึกหัด 5

1. $\lim_{x\to3}\sqrt{x^2+16} = \sqrt{\lim_{x\to3}(x^2+16)} = \sqrt{(3)^2+16} = \sqrt{25} = 5$

2. ลิมิตหาค่าไม่ได้ เนื่องจากเมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย ตัวเศษคงที่ = 2 ตัวส่วนเป็นค่าลบที่มีขนาดน้อยลง ๆ ทำให้ได้อัตราส่วนเป็นค่าลบ ที่ลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่สิ้นสุด ในขณะที่เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา ตัวเศษก็คงที่ = 2 ตัวส่วนเป็นค่าบวกที่มีขนาดน้อยลง ๆ ทำให้อัตราส่วนเป็นบวกเพิ่มมากขึ้นอย่างไม่สิ้นสุด

3. $\lim_{x\to6}(\sqrt{6x}+3x-\frac{1}{x})(x^2-4) = \left[\lim_{x\to6}(\sqrt{6x}+3x-\frac{1}{x})\right]\left[\lim_{x\to6}(x^2-4)\right]$
$= (\sqrt{36}+3(6)-\frac{1}{6})((6)^2-4) = (6+18-\frac{1}{6})(36-4) = 762\frac{2}{3}$

4. $\lim_{x\to7}(x+\sqrt{x-6})(x^2-2x+1) = [\lim_{x\to7}(x+\sqrt{x-6})][\lim_{x\to7}(x^2-2x+1)]$

$= (7+\sqrt{7-6})(7-1)^2 = (7+1)(6)^2 = 288$

5. $\lim_{x\to10}(2x^2-15x-50)^{20} = [\lim_{x\to10}(2x^2-15x-50)]^{20} = [2(10)^2-15(10)-50]^{20} = 0$

[หรือ $[\lim_{x\to10}(2x^2-15x-50)]^{20} = [\lim_{x\to10}(2x-5)(x-10)]^{20}$
$= [\lim_{x\to10}(2x-5)]^{20}[\lim_{x\to10}(x-10)]^{20} = [\lim_{x\to10}(2x-5)]^{20}\cdot 0 = 0$]

6. $\lim_{x\to2}\frac{-2x^2+4x}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{-2x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2}(-2x) = (-2)(2) = -4$

7. เนื่องจาก x^2 เข้าใกล้อนันต์ เร็วกว่า x เมื่อ $x\to\infty$ ทำให้ได้
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+64}{x-8}$ หาค่าไม่ได้ โดยเข้าใกล้ค่าอนันต์

8. $\lim_{x\to0}\frac{4x}{x(x^2+3x+5)} = \lim_{x\to0}\frac{4}{x^2+3x+5} = \frac{\lim_{x\to0}4}{\lim_{x\to0}(x^2+3x+5)} = \frac{4}{5}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{(\sqrt{x+16}+7)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(-2)}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+16}+7)} = \dfrac{-2}{(\sqrt{16}+7)} = \dfrac{-2}{4+7} = \dfrac{-2}{11}$

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-8x+16} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)^2} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4}$ = หาค่าไม่ได้

เพราะว่าเมื่อ $x\to 4^-$ เราจะได้ตัวเศษคงที่เท่ากับ 1 ในขณะที่ตัวส่วนเป็นค่าลบมีขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ ทำให้อัตราส่วนเป็นค่าลบ และลดลงอย่างไม่มีที่สิ้นสุด และเมื่อ $x\to 4^+$ ตัวเศษคงที่เท่ากับ 1 ในขณะที่ตัวส่วนเป็นค่าบวกขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ ทำให้อัตราส่วนเป็นค่าบวกและเพิ่มมากขึ้นอย่างไม่มีที่สิ้นสุด

11. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x+5)(x-5)}{x+5} = \lim\limits_{x\to 5}(x-5) = 5-5 = 0$

[หรือ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x+5} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 5}(x^2-25)}{\lim\limits_{x\to 5}(x+5)} = \dfrac{25-25}{5+5} = \dfrac{0}{10} = 0$]

12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1}(2x-3) = 2(-1)-3 = -5$

[ข้อสังเกต : เราทำแบบที่ 2 ของข้อ 11 ไม่ได้ เพราะ $\lim\limits_{x\to -1}(x+1) = 0$]

13. เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-3x^2-x+3) = 27-27-3+3 = 0$ ทำให้ใช้กฎผลหารไม่ได้

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^3-3x^2-x+3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2-x-2)}{(x-3)(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{3-2}{3-1} = \dfrac{1}{2}$

14. โดเมนของ $\sqrt{x^2-4}$ คือ $x \geq 2$ หรือ $x \leq -2$

อย่างไรก็ตาม เมื่อ $x \to -2^-$ ตัวเศษเป็นค่าลบมีค่าเข้าใกล้ -2 คงที่ ในขณะที่ $\sqrt{x^2-4}$ มีค่าบวกที่มีขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ มีผลทำให้อัตราส่วนมีค่าลบลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด เพราะฉะนั้น

$\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$ (หาค่าไม่ได้)

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1/(x+4) - 1/4]}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-(x+4)}{4x(x+4)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{4x(x+4)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{4(x+4)} = -\dfrac{1}{16}$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

19. โดเมนของ $\sqrt{4-x^2}$ คือ $-2 \le x \le 2$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{2-x}\,.\,\sqrt{2-x}}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{2+x}} = \sqrt{\dfrac{0}{4}} = \dfrac{0}{2} = 0$

20. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2.\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2) = 3x^2$

21. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+3.\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-1}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(3+3.\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3+3.\Delta x+(\Delta x)^2) = 3$

22. โดเมนของ $\sqrt{x-1}$ คือ $x \ge 1$ ส่วนโดเมนของ $\sqrt{1-x}$ คือ $x \le 1$ เพราะฉะนั้นโดเมนของ $(\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x})$ คือ $\{1\}$ แต่ $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x})$ พิจารณาเฉพาะเมื่อ $x \ne 1$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x})$ จึงไม่มีความหมาย

23. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ เมื่อพิจารณาเฉพาะเมื่อ x เป็นตรรกยะ และ

$\lim\limits_{x\to 1} x^3 = 1$ เมื่อพิจารณาเฉพาะเมื่อ x เป็นอตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

24. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 4x+6) = (2)^2 - 4(2) + 6 = 2$,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+4x-2) = -(2)^2 + 4(2) - 2 = 2$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

25. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x+2}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{12-2x}{3} = \frac{12-2(3)}{3} = \frac{6}{3} = 2$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้

26. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1$, และ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

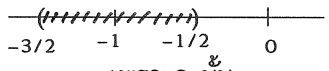
เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ หาค่าไม่ได้

27. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} -1 = -1$, และ

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ หาค่าไม่ได้

28. พิจารณา x ที่อยู่ใกล้ ๆ −1 ในช่วงที่ไม่รวม 0 เช่น $x \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

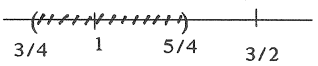


จะเห็นว่าทุก ๆ x ในช่วงนี้ $x < 0$ ทำให้เราสามารถถอดค่าสัมบูรณ์ $|x| = -x$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}}} \frac{|x|-1}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}}} \frac{-x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

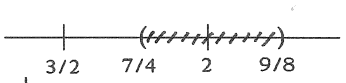
29. พิจารณา x ที่อยู่ใกล้ ๆ 1 ในช่วงที่ไม่รวม $\frac{3}{2}$ เช่น $x \in (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$



ซึ่งทุก ๆ x ในช่วงนี้ $x < \frac{3}{2}$ ทำให้เราสามารถถอดค่าสัมบูรณ์ $|2x-3| = 3-2x$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}}} |2x-3| = \lim_{\substack{x\to 1 \\ \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}}} (3-2x) = \lim_{x\to 1} (3-2x) = 3 - 2(1) = 1$$

30. พิจารณา x ที่อยู่ใกล้ ๆ 2 ในช่วงที่ไม่รวม $\frac{3}{2}$ เช่น $x \in (\frac{7}{4}, \frac{9}{8})$



ซึ่งทุก ๆ x ในช่วงนี้ $x > \frac{3}{2}$ ทำให้เราสามารถถอดค่าสัมบูรณ์ $|2x-3| = 2x-3$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ \frac{7}{4} < x < \frac{9}{8}}} \frac{1-|2x-3|}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{1-(2x-3)}{x-2} \quad \lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{x-2}$$

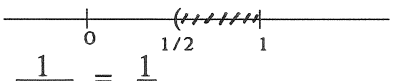
$$= \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (-2) = -2$$

31. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x} = -2$, แต่

$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-x}{x}$ หาค่าไม่ได้

32. พิจารณาเช่นในข้อ 28–30 เราจะได้



$$\lim_{\substack{x\to 1^- \\ \frac{1}{2} < x < 1}} \frac{1}{|x|+1} = \lim_{\substack{x\to 1^- \\ x>0}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

33. เนื่องจาก $|x^2-3x+2| = |x-2||x-1|$ และเราต้องการพิจารณา $x \to 1^-$ ดังนั้นเมื่อ $x < 1 < 2$ เราจะได้ $|x-1| = -(x-1)$ และ $|x-2| = -(x-2)$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2-3x+2|}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-2||x-1|}{1+x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{[-(x-1)][-(x-2)]}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)} = -\lim_{x\to 1^-} (x-2) = -(1-2) = 1$$

34. เนื่องจากโดเมนของ $\sqrt{x}$ คือ $x \geq 0$ และโดเมนของ $\sqrt{x-1}$ คือ $x \geq 1$ ซึ่งการหาค่าลิมิตเมื่อ $x \to 1^+$ เราพิจารณาเฉพาะ $x > 1$ เพราะฉะนั้นขณะนี้เรากำลังพิจารณาเฉพาะ $x > 1 > 0$ ทำให้ได้

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} (\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) = 1$$

35. พิจารณา $x \to 1^+$ แสดงว่าพิจารณา $x > 1$ ทำให้สามารถถอดค่าสัมบูรณ์ $|x-1| = x-1$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

36. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^6-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^3)^2-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to1}(x^3+1) = 2$

37. ให้ $t = x - \frac{\pi}{2}$ ดังนั้นเมื่อ $x \to \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $t \to 0$ เฉพาะฉะนั้น

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{1-\sin x} = \lim_{t\to0}\frac{\cos(t+\pi/2)}{1-\sin(t+\pi/2)} = \lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{1-\cos t}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{-\sin t\,(1+\cos t)}{\sin^2 t} = -\lim_{t\to0}\frac{1+\cos t}{\sin t}$$

เมื่อ $t \to 0$ ตัวเศษเข้าใกล้ค่าคงที่ 2 ในขณะที่ส่วนเล็กลงเรื่อย ๆ เข้าใกล้ 0 ทำให้ได้อัตราส่วนมากขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่สิ้นสุด เพราะฉะนั้น

$$\lim_{t\to\pi/2}\frac{\cos x}{1-\sin x} = -\lim_{t\to0}\frac{1+\cos t}{\sin t} = -\infty$$ (หาค่าไม่ได้)

38. $\lim\limits_{x\to0^-}\sin x = 0$

39. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$

40. $\lim\limits_{\theta\to\infty}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \lim\limits_{\theta\to\infty}1 = 1$

41. $\lim\limits_{\theta\to\infty}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \lim\limits_{\theta\to\infty}\cos 2\theta$

เนื่องจาก $\cos 2\theta$ มีค่ากวัดแกว่งอยู่ในช่วง -1 ถึง 1 เมื่อ $\theta \to \infty$ ดังนั้นจึงไม่เข้าใกล้จำนวนจริงตัวใด ทำให้ได้ $\lim\limits_{\theta\to\infty}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ หาค่าไม่ได้

42. เนื่องจาก $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น $-x^2 \leqslant x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant x^2$

และ $\lim\limits_{x\to0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to0}x^2 = 0$ ทำให้ได้โดย squeezing theorem ว่า

$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x} = 0$

43. ให้ $t = \frac{1}{x}$ ดังนั้นเมื่อ $x\to\infty$ เราจะได้ $t\to0$ และทำให้ได้

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{5}{x} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\sin 5t = \lim_{t\to0}\left(\frac{\sin 5t}{5t}\right).5 = 5\lim_{5t\to0}\left(\frac{\sin 5t}{5t}\right) = 5(1) = 5$$

44. เนื่องจากโดเมนของ $\sqrt{1-x^2}$ คือ $[-1, 1]$ แต่ $x \to +\infty$ แสดงว่าพิจารณาเมื่อ $x > 1$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ จึงไม่มีความหมาย

45. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^9+6x+3}{x^{10}-x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^9+6x+3)/x^{10}}{(x^{10}-x-1)/x^{10}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(1/x+6/x^9+3/x^{10})}{\lim\limits_{x\to-\infty}(1 - 1/x^9 -1/x^{10})} = \frac{0}{1} = 0$$

46. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+x^2+1}{3x^2+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^4+x^2+1)/x^4}{(3x^2+4)/x^4} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(1+1/x^2+1/x^4)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(3/x^2 + 4/x^4)}$$

จะเห็นว่า ลิมิตตัวเศษเข้าใกล้ค่าคงที่ 1 ในขณะที่ลิมิตตัวส่วนมีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ ทำให้อัตราส่วนของผลลัพธ์มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่สิ้นสุดเข้าสู่ $+\infty$

47. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-100x+3}{5x^4+7x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^4-100x+3)/x^4}{(5x^4+7x-1)/x^4}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(3 - 100/x^3 + 3/x^4)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(5 + 7/x^3 -1/x^4)} = \frac{3}{5}$$

48. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}/\sqrt{x^2}}{(x+2)/(-x)}$$ (เพราะว่า $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ เมื่อ $x<0$)

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}(-1 - 2/x)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(4 + 1/x^2)}}{(-1)} = -\sqrt{4} = -2$$

49. $$\lim_{y\to-\infty} \frac{2 - y^2}{\sqrt{y^2+1}} = \lim_{y\to-\infty} \frac{(2 - y^2)/y^2}{\sqrt{y^4+1}/\sqrt{y^4}}$$ (เพราะว่า $\sqrt{y^4} = y^2 > 0$)

$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{(2/y^2 - 1)}{\sqrt{1+1/y^4}} = \frac{\lim\limits_{y\to-\infty}(2/y^2 - 1)}{\sqrt{\lim\limits_{y\to-\infty}(1+1/y^4)}} = \frac{-1}{1} = -1$$

50. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-4})/\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}/\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x/(-x)+\sqrt{(x^2-4)}/\sqrt{x^2}}{\sqrt{(x^2+1)/x^2}}$$ (เพราะว่า $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ เมื่อ $x < 0$)

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(-1+\sqrt{1-4/x^2})}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(1+1/x^2)}} = \frac{-1+1}{1} = 0$$

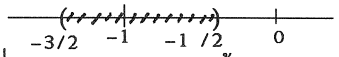
51. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^{100}}{(2x+50)^{100}} = \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x+50}\right)^{100}$$

$$= \left[\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)/x}{(2x+50)/x}\right]^{100} = \left[\lim_{x\to-\infty}\frac{1+1/x}{2+50/x}\right]^{100} = \frac{1}{2^{100}}$$

52. $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} = \lim_{x\to\infty}\frac{[(x+1)/x][(x+2)/x]}{[(x+3)/x][(x+4)/x]}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+1/x)(1+2/x)}{(1+3/x)(1+4/x)} = \frac{(1)(1)}{(1)(1)} = 1$$

53. พิจารณา x ที่อยู่ใกล้ ๆ −1 ในช่วงที่ไม่รวม 0 เช่น $x \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$



จะเห็นว่า ทุก x ในช่วงดังกล่าว $x < 0$ ทำให้เราสามารถถอดค่าสัมบูรณ์ $|x| = -x$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ \frac{-3}{2}<x<\frac{-1}{2}}}\frac{|x|-1}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{-x-1}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{-(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to-1}(-1) = -1$$

54. ให้ $a \neq 0$ จะได้

$$\lim_{x\to0}\frac{\sec^2ax-1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2ax}{x^2\cos^2ax} = \lim_{x\to0}\frac{\sin^2ax}{x^2\cos^2ax} = \lim_{x\to0}\left(\frac{a^2\sin^2ax}{(ax)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2ax}\right)$$

$$= a^2\left(\lim_{ax\to0}\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos^2ax}\right) = a^2(1)(1) = a^2$$

55. ให้ $t = \frac{1}{x}$ แล้วเมื่อ $x\to\infty$ จะได้ $t\to0$ ทำให้ได้ $\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to0}\sin t = 0$

56. $\lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t}{6t} = \lim_{t\to 0} (\frac{\sin 3t}{3t})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{3t\to 0} (\frac{\sin 3t}{3t}) = (\frac{1}{2})(1) = \frac{1}{2}$

57. เนื่องจากค่าของ sin x มีค่ากวัดแกว่งอยู่ในช่วง −1 ถึง 1 เมื่อ $x\to\infty$ ดังนั้น sin x จึงไม่เข้าใกล้จำนวนจริงตัวใด เมื่อ $x\to\infty$ หรือนั่นคือ $\lim_{x\to\infty} \sin x$ หาค่าไม่ได้

58. ทำให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะ

$$\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2-2x+3} = \frac{x^2+2x+3-x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-2x+3}}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2-2x+3}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x/x}{(\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-2x+3})/\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 4}{\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+2/x+3/x^2} + \sqrt{1-2/x+3/x^2})} = \frac{4}{2} = 2$$

59. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2-6x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-2x^2+6x}{\sqrt{2x^2} + \sqrt{2x^2-6x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x/x}{\sqrt{2x^2/x^2} + \sqrt{(2x^2-6x)/x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{2} + \sqrt{2 - 6/x}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

60. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+5x} - \sqrt{4x^2+x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+5x-4x^2-x}{\sqrt{4x^2+5x} + \sqrt{4x^2+x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x/x}{\sqrt{(4x^2+5x)/x^2} + \sqrt{(4x^2+x)/x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{4+5/x} + \sqrt{4+1/x}} = \frac{4}{2\sqrt{4}} = 1$$

61. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{bx^2+ax} - \sqrt{bx^2-ax}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{bx^2+ax-bx^2+ax}{\sqrt{bx^2+ax} + \sqrt{bx^2-ax}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2ax/(-x)}{\sqrt{(bx^2+ax)/x^2} + \sqrt{(bx^2-ax)/x^2}}$$ (เพราะว่า $\sqrt{x^2} = -x$ เมื่อ $x < 0$)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2a}{\sqrt{b + a/x} + \sqrt{b - a/x}} = \frac{-2a}{2\sqrt{b}} = \frac{-a}{\sqrt{b}}$$

62. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2(x^2-1)} - x^2) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2-x^4}{\sqrt{x^2(x^2-1)} + x^2}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2/x^2}{\sqrt{x^2(x^2-1)/x^4} + x^2/x^2}$ (เพราะว่า $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$)

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1 - 1/x^2} + 1} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$

63. $\lim_{x\to2}(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}) = \lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

64. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)/(-x)}{\sqrt{(x^2+x)/x^2} + \sqrt{(x^2+1)/x^2}}$ (เพราะว่า $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ เมื่อ $x < 0$)

$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-1+1/x)}{\sqrt{1+1/x} + \sqrt{1+1/x^2}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$

65. $\lim_{x\to a}f(x) = \frac{3}{2}$ และ $\lim_{x\to a}g(x) = \frac{1}{2}$

65.1 $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a}f(x) + \lim_{x\to a}g(x) = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

65.2 $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to a}f(x))(\lim_{x\to a}g(x)) = (\frac{3}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

65.3 เพราะว่า $\lim_{x\to a}g(x) = \frac{1}{2} \neq 0$ ทำให้ได้

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ $(3/2)/(1/2) = 3$

66.

66.1 ให้ $f(x) = 5x$ และ $g(x) = x^2+x$ ดังนั้น

$\lim_{x\to0}5x = 0$ และ $\lim_{x\to0}(x^2+x) = 0$ และ

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{5x}{x(x+1)} = \lim_{x\to0}\frac{5}{x+1} = 5$

66.2 ให้ $f(x) = 1/x$ และ $g(x) = 20x$ แล้ว

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ และ

$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})(20x) \lim_{x\to\infty} 20 = 20$

66.3 ให้ $f(x) = \frac{1}{x+1}$ และ $g(x) = x^2$ แล้ว

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ และ

$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x + 1/x^2} = \infty$

66.4 ให้ $f(x) = x-3$ และ $g(x) = x-6$ แล้ว

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x-3) = \infty$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (x-6) = \infty$ และ

$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty} [(x-3) - (x-6)] = \lim_{x\to\infty} (x-3-x+6) = 3$

66.5 ให้ $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ และ $g(x) = \frac{x^3}{x+1}$ แล้ว

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x-1} = \infty$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x-1} = \infty$ และ

$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty} x^3(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(x+1-x+1)}{x^2-1}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2-1} = \infty$

66.6 ให้ $f(x) = x^2-1$ และ $g(x) = x-1$ แล้ว

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2-1) = \infty$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (x-1) = \infty$ และ

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty$