ชุดฝึกหัด 8
การหาอนุพันธ์โดยนิยามและสูตรทั่วไป

1. จงเขียนนิยามของการหาอนุพันธ์ของ $y = f(x)$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้ โดยใช้นิยาม

   2.1 $f(x) = 2x - 7$

   2.2 $f(x) = ax + b$

   2.3 $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

   2.4 $f(x) = x^3$

   2.5 $f(x) = x^4$

   2.6 $f(x) = 1/x$

   2.7 $f(x) = x^{1/3}$

   2.8 $f(x) = x^{3/4}$

   2.9 $f(x) = \sqrt{3x+2}$

   2.10 $f(x) = x + \sqrt{x}$

   2.11 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   2.12 $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

3. จงเขียนสูตรการหาอนุพันธ์ของ $y = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง

4. จงเขียนสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

5. กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ จงเขียนสูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผลบวก $f(x) + g(x)$, ฟังก์ชันผลคูณ $f(x)g(x)$ และฟังก์ชันผลหาร $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้

   6.1 $f(x) = 35x^4 - 12x^3 + 12x + 3$

   6.2 $f(x) = (2x^2 + 1)^2$

   6.3 $f(x) = 3x^2 + x^{4/3} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}, \ x \neq 0$

   6.4 $F(x) = (5x^3 - 20x + 13)(4x^6 + 2x^5 - 7x^2 + 2x)$

   6.5 $f(x) = x^{7/2} + 3x^{1/3} + x^{-2/3}, \ x > 0$

   6.6 $G(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+7}$

   6.7 $f(x) = \dfrac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4}$

   6.8 $f(x) = -8x^5 + \sqrt{3}x^3 + 2\pi x^2 - 12$

6.9 $f(x) = 2x^{51} + 3x^{12} - 14x^2 + \sqrt[3]{7}x + \sqrt{5}$

6.10 $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6}$, $x \neq 2, 3$

6.11 $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$

6.12 $f(x) = \dfrac{x^{3/2}}{x+1}$, $x \geqslant 0$

6.13 $f(x) = \dfrac{x^{2/5} - x^{5/2}}{x^2+1}$, $x \geqslant 0$

6.14 $f(x) = 3x + (x^{1/3} + 1)(x^{2/3} - 1) + \dfrac{7x}{1+x^2}$

6.15 $f(x) = 2x^3 + \dfrac{x^2-4}{x^2+4} + x^2(1 + x^{4/3})$

7. จงเขียนสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของผลคูณของ 3 ฟังก์ชัน $D_x[f(x)g(x)h(x)]$

8. จงหาอนุพันธ์ $\dfrac{d}{dx}(x+2)(x-1)(x+3)$

9. จงแสดงว่า ถ้า $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ โดยที่ u, v และ w ต่างเป็นฟังก์ชันมีอนุพันธ์แล้ว

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}$$

10. จงคำนวณค่าลิมิต $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5(\frac{1}{3} + h)^4 - 5(\frac{1}{3})^4}{h}$

11. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $f^*(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

จงแสดงว่า $f^*(x) = 2f'(x)$

12. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $f(x_0) = 0$ จงหาค่าของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x_0 + h)}{7h}$

13. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} + 5 & , x > 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 2$ หรือไม่

14. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่ง $f(u+v) - f(u) = kuv - 2v^2$ สำหรับทุกจำนวนจริง u และ v โดยที่ k เป็นค่าคงที่ จงหาสูตรการคำนวณ $f'(x)$

15. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4x^3-7x^2$ ณ จุดซึ่ง $x = 3$

16. กำหนดให้ $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$ จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุดซึ่ง $x = 0$

17. เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (0, 1) จะสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^5 + 4x - 3$ ที่จุดใด

18. เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^3 + x + 4$ ที่ผ่านจุด (1, 5) มีได้ทั้งหมดกี่เส้น จงเขียนสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งเหล่านั้น

19. จงหาค่า a, b, c และ d เพื่อให้เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = ax^3+bx^2+cx+d$ ที่จุด (1, 0) คือ $y = 3x-3$ และที่จุด (2, 9) คือ $y = 18x-27$

20. จงหาค่า c ที่จะทำให้เส้นตรง $4x-9y = 0$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{x^3}{3}+c$ ในจตุภาคที่ 1

21. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^2$ ซึ่งเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดเหล่านี้ผ่านจุด (2, −12)

22. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{3x}{x^2+1}$ ซึ่งขนานกับแกน x

23. เส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ $y = \frac{1}{x^2}$ ตัดกันที่จุด (1, 1) จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งทั้งสองที่จุดตัดนี้ และพิจารณาด้วยว่าเส้นตรงทั้งสองตั้งฉากกันหรือไม่

24. กำหนดให้ (a, b) เป็นจุดซึ่ง $b < a^2$ จงแสดงว่าจะมีเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่ผ่านจุด (a, b) อยู่ 2 เส้น

25. ถ้า f และ g ต่างเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ จงหาอนุพันธ์ของ $\frac{fg}{f+g}$

เฉลยชุดฝึกหัด 8

1. $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to o}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

2. 2.1 $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(x+\Delta x) - 7] - (2x-7)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-7-2x+7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

2.2 $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[a(x+\Delta x) + b] - (ax+b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{ax+a\Delta x+b-ax-b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$

2.3 $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[2(x+h)^2 - 3(x+h) + 5] - (2x^2 - 3x+5)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2-3x-3h+5-2x^2+3x-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2-3h}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x-3+2h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4x-3+2h) = 4x-3$

2.4 เนื่องจาก $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ ดังนั้น

$f(x+\Delta x) - f(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = (\Delta x)(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$ จึงได้

$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$

2.5 เพราะว่า $(x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3(\Delta x) + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4$ จะได้

$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)(4x^3+6x^2(\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x}$ ดังนั้น

$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4x^3+6x^2(\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) = 4x^3$

2.6 $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right]$

$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x^2}$

2.7 เพราะว่า $(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3} = \dfrac{[(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

ดังนั้น $\dfrac{(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x} = \dfrac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$

และทำให้ได้ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x} = \dfrac{1}{3x^{2/3}} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

2.8 ใช้สูตร $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ จะได้

$$(x+h)^{3/4} - x^{3/4} = \left[(x+h)^{1/4}\right]^3 - (x^{1/4})^3$$
$$= \left[(x+h)^{1/4} - x^{1/4}\right]\left[(x+h)^{2/4} + (x+h)^{1/4}x^{1/4} + x^{2/4}\right]$$

แต่ $h = (x+h) - x = \left[(x+h)^{1/4}\right]^4 - (x^{1/4})^4$

$$= \left[(x+h)^{1/4} - x^{1/4}\right]\left[(x+h)^{3/4} + (x+h)^{2/4}x^{1/4} + (x+h)^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4}\right]$$

เพราะฉะนั้น

$(x+h)^{3/4} - x^{3/4}$

$$= \frac{\left[(x+h)^{1/4}-x^{1/4}\right]\left[(x+h)^{3/4}+(x+h)^{2/4}x^{1/4}+(x+h)^{1/4}x^{2/4}+x^{3/4}\right]\left[(x+h)^{2/4}+(x+h)^{1/4}x^{1/4}+x^{2/4}\right]}{\left((x+h)^{3/4}+(x+h)^{2/4}x^{1/4}+(x+h)^{1/4}x^{2/4}+x^{3/4}\right)}$$

$$= \frac{h\left[(x+h)^{2/4}+(x+h)^{1/4}x^{1/4}+x^{2/4}\right]}{\left[(x+h)^{3/4}+(x+h)^{2/4}x^{1/4}+(x+h)^{1/4}x^{2/4}+x^{3/4}\right]}$$

ดังนั้น $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^{3/4} - x^{3/4}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{2/4} + (x+h)^{1/4}x^{1/4} + x^{2/4}}{(x+h)^{3/4} + (x+h)^{2/4}x^{1/4} + (x+h)^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4}}$$

$$= \frac{x^{2/4} + x^{1/4}x^{1/4} + x^{2/4}}{x^{3/4} + x^{2/4}x^{1/4} + x^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4}} = \frac{3x^{1/2}}{4x^{3/4}} = \frac{3}{4}x^{-1/4}$$

2.9 $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3(x+h)+2} - \sqrt{3x+2}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)+2-(3x+2)}{h(\sqrt{3(x+h)+2} + \sqrt{3x+2})} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h(\sqrt{3(x+h)+2} + \sqrt{3x+2})}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3(x+h)+2} + \sqrt{3x+2}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

2.10 $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)+\sqrt{x+h}-x-\sqrt{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{h}+\frac{1}{h}\cdot\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right] = \lim_{h\to 0}\left[1+\frac{1}{h}\left(\frac{x+h-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) = 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.11 $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{(x+h)^2+1}-\frac{x}{x^2+1}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(x^2+1)-x\left[(x+h)^2+1\right]}{h\left[(x+h)^2+1\right](x^2+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+x+x^2h+h-x^3-2x^2h-xh^2-x}{h\left[(x+h)^2+1\right](x^2+1)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-x^2-xh+1)}{h\left[(x+h)^2+1\right](x^2+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-x^2-xh+1}{\left[(x+h)^2+1\right](x^2+1)} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

2.12 $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h}+\frac{1}{x+h}-\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}+\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x+h-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}-\frac{h}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}-\frac{1}{x(x+h)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$$

3. $$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

4. $$f'(x) = n\,a_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+2a_2x+a_1$$

5. $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$, $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}\ ,\ g(x)\neq 0$$

6. 6.1 $f'(x) = (35)(4)x^3-(12)(3)x^2+12 = 140x^3-36x^2+12$

6.2 เพราะว่า $f(x) = (2x^2+1)^2 = 4x^4+4x^2+1$ ดังนั้น $f'(x) = 16x^3+8x$

6.3 $$f'(x) = 6x+\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}\ ,\quad x\neq 0$$

6.4 $$F'(x) = (5x^3-20x+13)'(4x^6+2x^5-7x^2+2x)+(5x^3-20x+13)(4x^6+2x^5-7x^2+2x)'$$
$$= (15x^2-20)(4x^6+2x^5-7x^2+2x)+(5x^3-20x+13)(24x^5+10x^4-14x+2)$$

6.5 $f'(x) = \frac{7}{2}x^{5/2} + x^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{-5/3}$, $x > 0$

6.6 $G'(x) = \dfrac{(x^2+7)(3x-2)' - (x^2+7)'(3x-2)}{(x^2+7)^2} = \dfrac{(x^2+7)(3) - (2x)(3x-2)}{(x^2+7)^2} = \dfrac{21+4x-3x^2}{(x^2+7)^2}$

6.7 $f(x) = 3x^3 + x - 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}$ ทำให้ได้ $f'(x) = 9x^2 + 1 - \frac{3}{x^4} + \frac{12}{x^5}$

6.8 $f'(x) = -40x^4 + 3\sqrt{3}x^2 + 4\pi x$

6.9 $f'(x) = 102x^{50} + 36x^{11} - 28x + \sqrt[3]{7}$

6.10 $f'(x) = \dfrac{(x^2-5x+6)(x^4-3x^2+2)' - (x^2-5x+6)'(x^4-3x^2+2)}{(x^2-5x+6)^2}$

$= \dfrac{(x^2-5x+6)(4x^3-6x) - (2x-5)(x^4-3x^2+2)}{(x^2-5x+6)^2}$

6.11 $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(x^3+2x)' - (x^2+1)'(x^3+2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)(3x^2+2) - (2x)(x^3+2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{x^4+x^2+2}{x^4+2x^2+1}$

6.12 $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x^{3/2})' - (x+1)'(x^{3/2})}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)(\frac{3}{2})x^{1/2} - (1)x^{3/2}}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{x^{3/2} + 3x^{1/2}}{2(x+1)^2} = \dfrac{x^{1/2}(x+3)}{2(x+1)^2}$

6.13 $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(x^{2/5} - x^{5/2})' - (x^2+1)'(x^{2/5} - x^{5/2})}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{(x^2+1)\left(\frac{2}{5}x^{-3/5} - \frac{5}{2}x^{3/2}\right) - (2x)(x^{2/5} - x^{5/2})}{(x^2+1)^2}$

6.14 $f'(x) = 3 + (x^{1/3}+1)'(x^{2/3}-1) + (x^{1/3}+1)(x^{2/3}-1)' + (\dfrac{(1+x^2)(7x)' - (1+x^2)'(7x)}{(1+x^2)^2}$

$= 3 + \dfrac{1}{3}x^{-2/3}(x^{2/3}-1) + (x^{1/3}+1)(\dfrac{2}{3}x^{-1/3}) + \dfrac{7(1+x^2) - (2x)(7x)}{(1+x^2)^2}$

$= 4 - \dfrac{1-2x^{1/3}}{3x^{2/3}} + \dfrac{7(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

6.15 $f'(x) = 6x^2 + \dfrac{(x^2+4)(x^2-4)' - (x^2+4)'(x^2-4)}{(x^2+4)^2} + x^2(1+x^{4/3})' + (x^2)'(1+x^{4/3})$

$= 6x^2 + \dfrac{(x^2+4)(2x) - (2x)(x^2-4)}{(x^2+4)^2} + x^2(\dfrac{4}{3}x^{1/3}) + 2x(1+x^{4/3})$

$= 6x^2 + \dfrac{16x}{(x^2+4)^2} + \dfrac{4}{3}x^{7/3} + 2x+2x^{7/3} = 2x + 6x^2 + \dfrac{10}{3}x^{7/3} + \dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$

7. $D_x\,[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

8. $\dfrac{d}{dx}(x+2)(x-1)(x+3) = (x+2)'(x-1)(x+3) + (x+2)(x-1)'(x+3) + (x+2)(x-1)(x+3)'$

$= (x-1)(x+3) + (x+2)(x+3) + (x+2)(x-1)$

9. จากข้อ 7 จะได้ $f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$ เพราะฉะนั้น

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)}{u(x)v(x)w(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)} + \dfrac{v'(x)}{v(x)} + \dfrac{w'(x)}{w(x)}$

10. ให้ $f(x) = 5x^4$ แล้ว $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(1/3+h)^4 - 5(1/3)^4}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1/3+h) - f(1/3)}{h} = f'(\frac{1}{3})$

ซึ่งก็คืออนุพันธ์ของ f ที่ $x = \dfrac{1}{3}$ แต่ $f'(x) = 20x^3$ ทำให้ได้ $f'(\frac{1}{3}) = \dfrac{20}{3^3} = \dfrac{20}{27}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(1/3+h)^4 - 5(1/3)^4}{h} = \dfrac{20}{27}$

11. $f^*(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x) + f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

$= f'(x) + \lim\limits_{\Delta x\to 0} f'(x-\Delta x) = f'(x) + f'(x) = 2f'(x)$

12. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)}{7h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{7h} = \frac{1}{7}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{7}f'(x_0$

13. พิจารณาว่า $\lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ หาค่าได้หรือไม่ ดังนี้

$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2x+1-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-2)}{x-2} = 2$ แต่

$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2} + 5 - 5}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

เพราะฉะนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 2$

14. $f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{kxh - 2h^2}{h} = \lim_{x\to 0}(kx - 2h) = kx$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 7x^2) = 4\frac{dx^3}{dx} - 7\frac{dx^2}{dx} = (4)3x^2 - (7)(2x) = 12x^2 - 14x$

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 12(3)^2 - (14)(3) = (12)(9) - (14)(3) = 108 - 42 = 66$

และ $x = 3$ จะได้ $y = 4(3)^3 - 7(3)^2 = 45$ เพราะฉะนั้นสมการเส้นสัมผัสคือ

$y-45 = 66(x-3)$ หรือ $y = 66x - 153$

16. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = 0$ มีความชัน $= f'(0) = 1$ และผ่านจุด $(0, -1)$ จะมีสมการเป็น $y-(-1) = 1(x-0)$ หรือ $y = x-1$

17. สมมติให้เส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด (0, 1) สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^5+4x-3$ ที่จุด (a, b) ดังนั้น

$b = a^5+4a-3$ .....(1)

แต่ L จะมีความชันเท่ากับ $\frac{b-1}{a}$ และเท่ากับ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = (5x^4 + 4)\Big|_{x=a} = 5a^4 + 4$

ทำให้ได้สมการ

$\frac{b-1}{a} = 5a^4 + 4$ หรือ $b = 5a^5 + 4a + 1$ .....(2)

จากสมการ (1) และ (2) เราจะได้ $a^5 + 4a - 3 = 5a^5 + 4a + 1$ หรือ $4(a^5 + 1) = 0$

ทำให้ได้ $a = -1$ และได้ $b = -8$ เพราะฉะนั้นเส้นตรง L สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^5+4x-3$ ที่จุด $(-1, -8)$

18. สมมติให้เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1, 5) สัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^3+x+4$ ที่จุด (a, b) ดังนั้น

$b = 3a^3+a+4$ .....(1)

และเส้นสัมผัสจะมีความชัน เท่ากับ $\frac{b-5}{a-1}$ และเท่ากับ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 9a^2 + 1$

เพราะฉะนั้น $9a^2 + 1 = \frac{b-5}{a-1}$ หรือ $9a^3 - 9a^2 + a + 4 = b$ .....(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$3a^3 + a + 4 = 9a^3 - 9a^2 + a + 4 \quad \text{หรือ} \quad 3a^2(2a - 3) = 0$$

ทำให้ได้ $a = 0 , \frac{3}{2}$ นั่นคือเส้นสัมผัสเส้นโค้งดังกล่าว ที่ผ่านจุด (1, 5) จะมีสองเส้นที่มีความชันเป็น

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 1 \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{85}{4}$$

ตามลำดับ ทำให้ได้สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งทั้งสอง คือ

$$y-5 = x-1 \quad \text{และ} \quad y-5 = \frac{85}{4}(x-1)$$

หรือ $y = x+4$ และ $4y-85x + 65 = 0$

19. $\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ที่จุด (1, 0) คือ $y = 3x-3$ และที่จุด (2, 9) คือ $y = 18x-27$ ทำให้ได้

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 3 \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = 18$$

ดังนั้น

$$3a(1)^2 + 2b(1) + c = 3 \quad \text{หรือ} \quad 3a + 2b + c = 3 \qquad .....(1)$$

และ

$$3a(2)^2 + 2b(2) + c = 18 \quad \text{หรือ} \quad 12a + 4b + c = 18 \qquad .....(2)$$

แต่จุด (1, 0) และ (2, 9) อยู่บนเส้นโค้งด้วย ทำให้ได้ด้วยว่า

$$a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 0 \quad \text{หรือ} \quad a+b+c+d = 0 \qquad .....(3)$$

และ

$$a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 9 \quad \text{หรือ} \quad 8a+4b+2c+d = 9 \qquad .....(4)$$

จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้ $a = 3$, $b = -6$, $c = 6$ และ $d = -3$

20. สมมติให้เส้นตรง $4x-9y = 0$ หรือนั่นคือเส้นตรง $y = \frac{4}{9}x$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{x^3}{3} + c$ ที่จุด (a, b) ดังนั้น $a \geqslant 0$ และ $b \geqslant 0$ แต่ $\frac{dy}{dx} = x^2$ ทำให้ได้ $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = a^2 = \frac{4}{9}$

หรือ $a = \pm\frac{2}{3}$ เพราะฉะนั้น $a = \frac{2}{3}$

แต่จุด (a, b) อยู่บนเส้นตรง $y = \frac{4}{9}x$ และบนเส้นโค้ง $y = \frac{x^3}{3} + c$ เราจึงได้สมการ

$$b = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \quad \text{และ} \quad b = \frac{8}{81} + c$$

ทำให้ได้ $c = \frac{8}{27} - \frac{8}{81} = \frac{16}{81}$

21. สมมติให้เส้นตรง L ผ่านจุด (2, −12) และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่จุด (a, b) ดังนั้นเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ $\frac{b+12}{a-2}$ และจะต้องเท่ากับ $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = (x^2)'\Big|_{x=a} = 2a$ ด้วย

เพราะฉะนั้น $\frac{b+12}{a-2} = 2a$ แต่ $b = a^2$ ทำให้ได้ $\frac{a^2+12}{a-2} = 2a$ หรือ $a^2 - 4a - 12 = 0$ นั่นคือได้ $a = -2 , 6$ ดังนั้นจุดที่ต้องการคือ $(-2, 4)$ และ $(6, 36)$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(3) - (3x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \pm 1$

ดังนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{3x}{x^2+1}$ ซึ่งขนานกับแกน x เส้นหนึ่งจะผ่านจุด $(1, \frac{3}{2})$

และอีกเส้นหนึ่งจะผ่านจุด $(-1, \frac{-3}{2})$ ทำให้ได้สมการเส้นสัมผัสเป็น

$y - \frac{3}{2} = 0(x-1)$ และ $y + \frac{3}{2} = 0(x+1)$

หรือ $y = \frac{3}{2}$ และ $y = \frac{-3}{2}$ ตามลำดับ

23. ให้ L_1 เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่จุด (1, 1) และ

L_2 เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{1}{x^2}$ ที่จุด (1, 1)

จะได้ว่า L_1 ที่ความชันเท่ากับ $\frac{d\sqrt{x}}{dx}\Big|_{x=1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}$

และ L_2 ที่ความชันเท่ากับ $\frac{d(1/x^2)}{dx}\Big|_{x=1} = \left(\frac{-2}{x^3}\right)_{x=1} = -2$

เพราะฉะนั้นเส้นตรง L_1 และ L_2 ตั้งฉากกัน โดยมีสมการของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ

$y-1 = \frac{1}{2}(x-1)$ และ $y-1 = -2(x-1)$

หรือ $2y-x-1 = 0$ และ $y+2x-3 = 0$ ตามลำดับ

24. สมมติให้เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (a, b) สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่จุด (c, d) ดังนั้นเส้นสัมผัสจะมีความชันเท่ากับ $\frac{b-d}{a-c}$ ซึ่งจะต้องเท่ากับ $\frac{d(x^2)}{dx}\Big|_{x=c} = 2c$ ทำให้ได้สมการ $\frac{b-d}{a-c} = 2c$

แต่จุด (c, d) อยู่บนเส้นโค้ง $y = x^2$ ทำให้ได้ $d = c^2$ หรือนั่นคือ ได้ว่า

$\frac{b-c^2}{a-c} = 2c$ หรือ $2c(a-c) = b-c^2$ หรือ $c^2 - 2ac + b = 0$

ซึ่งจะหาค่า c ได้จากสูตร

$$c = \frac{-(-2a) \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4(1)b}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

ดังนั้น c จะเป็นค่าจริงเมื่อ $a^2 > b$ ตามโจทย์กำหนด หรือเราอาจกล่าวได้ว่า เมื่อ $a^2 > b$ เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (a, b) จะสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่จุด $(a + \sqrt{a^2 - b}\ ,\ 2a^2 - b + 2a\sqrt{a^2 - b})$ และที่จุด $(a - \sqrt{a^2 - b}\ ,\ 2a^2 - b - 2a\sqrt{a^2 - b})$ นั่นคือมีเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ อยู่สองเส้นที่ผ่านจุด (a, b) เมื่อ $a^2 > b$

25. $\left(\frac{fg}{f+g}\right)' = \frac{(f+g)(fg)' - (f+g)'(fg)}{(f+g)^2} = \frac{(f+g)(fg'+f'g) - (f'+g')(fg)}{(f+g)^2}$

$$= \frac{f^2g' + f'g^2}{(f+g)^2}$$